Mathematics Foundations and Theory of Sets

Fundamentos Matemáticos y Teoría de Conjuntos

Peter B. Aczel
University of Manchester. Department of Computer Science and Mathematics
peterba@cs.man.ac.uk

(Artículo de **REFLEXIÓN**. Recibido el 15-08-2010. Aprobado el 10-11-2010)

***Abstract** — In this paper we analyze the proposals of John Mayberry in his book “The Foundations of Mathematics in the Theory of Sets”, especially his idea of solving a problem of more than 200 years: to explain the Foundations of Mathematics.*

***Keywords**: foundations of the mathematical, set theory, axioms, axiomatic system, axiomatic method.*

Resumen — En este trabajo se hace un análisis a las propuestas de John Mayberry en su libro “*The Foundations of Mathematics in the Theory of Sets*”, especialmente a su idea de resolver un problema de más de 200 años: explicar los fundamentos de las matemáticas.

Palabras clave: fundamentos de la matemática, teoría de conjuntos, axiomas, sistema axiomático, método axiomático.

1. Introducción

En “*The Foundations of Mathematics in the Theory of Sets*”, John Mayberry (1990) trata de resolver un problema de más de 2000 años de antigüedad: explicar los fundamentos de las matemáticas. Estructura su relato en tres cuestiones interrelacionadas: 1) determinar exactamente lo que debería —y no debería— esperarse de un fundamento; 2) argumentar que la teoría de conjuntos, de hecho, puede proporcionar dicho fundamento; y 3) presentar una nueva versión de la teoría de conjuntos —o al menos una nueva exposición de la teoría de conjuntos tradicional—, que puede cumplir este papel fundamental.

Él se dirige a la primera de estas cuestiones —capítulos 1 y 6— argumentando que el aspecto más importante de las matemáticas es el método axiomático, y por lo tanto un fundamento para las matemáticas debe proporcionar una justificación de este método —pero que necesita proporcionar un poco más. Los Sistemas Axiomáticos, de acuerdo con Mayberry, aíslan las estructuras matemáticas particulares —o lo pretenden—, y todo lo que queda para que un fundamento supla es la garantía de que existe una estructura apropiada que satisfaga los axiomas.

> Para cuando empleamos el método axiomático, sólo tenemos que reconocer que el tema especial de los conjuntos pertenece a las matemáticas [...]. Todo lo que se requería, históricamente, para reemplazar completamente a los métodos tradicionales era establecer tres teorías axiomáticas [análisis, aritmética y geometría] […], y luego mostrar cómo [estas teorías] podrían reconstruirse mediante simples métodos algebraicos y de teoría de conjuntos aplicados a modelos de esas teorías (p. 204).

Con toda la razón señala que la axiomatización formal de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel es un lugar inapropiado para buscar un fundamento, ya que se trata, como el análisis, de una teoría matemática con la necesidad de un fundamento, no un candidato para proporcionar alguno. Sostiene, por tanto, que lo que se necesita es una teoría no formal consistente de verdades evidentes que pueden proporcionar el tema especial de las matemáticas axiomáticas y por lo tanto proporcionar el fundamento necesario.

Una vez que uno conoce lo que está buscando, puede proceder a las cuestiones dos y tres: proporcionar un fundamento que satisfaga a la desiderata descrita anteriormente —esta cuestión la aborda en los capítulos 2-5 y 7. Mayberry afirma que la teoría de conjuntos, adecuadamente concebida, puede proporcionar un fundamento. La teoría de conjuntos en cuestión es una colección informal de axiomas justificadas por la noción intuitiva de lo finito, comprendida: "en el sentido esencial y original de ‘finito’, el sentido no técnico, a saber: ‘limitado’ —o definido o delimitado— en el ‘tamaño’” (p. 47).

Este uso no estándar —por lo menos para los oídos contemporáneos— de “finito” puede ser confuso para un lector menos cuidadoso de lo que debería, aunque Mayberry es muy consiente al recordarle al lector lo que no es “finito”, ya que el término utilizado en el libro significa lo mismo que el “finito” de Dedekind (1963). Para terminar este comentario, en adelante se colocará “finito” entre comillas cuando se le use de acuerdo con el significado de Mayberry, y se entenderá como limitado o delimitado, diferenciándolo del uso más tradicional —no citado— de la palabra.

2. Rasgos históricos de la cuestión

Para los antiguos griegos, “finito” coincidía —al menos intuitivamente— con la noción moderna de Dedekind, y la revolución teórica de conjuntos que surgió, con el cambio de siglo, a partir de:

> La clave de la doctrina Cantor (2006) [...], según la cual una pluralidad puede ser del mismo tamaño que algunas de sus propias sub-pluralidades y sin embargo sigue siendo finita [...]. En efecto él rechaza la noción clásica de la finitud, concepto empleado por Aristóteles y Euclides (p. 47).

Así, la historia de la teoría de conjuntos se describe como el proceso que modifica colecciones, o pluralidades, definidas como "finitas". Esta reconstrucción racional de la historia de la teoría de conjuntos como la evolución de la noción de "finito" es una de las partes más interesantes y útiles de las primeras secciones del texto en cuestión.

Mayberry presenta analogías informales para la mayoría de los axiomas estándar —por ejemplo, conjunto potencia, unión, conjunto vacío, vinculación, sustitución, etc.— que según él son justificados por este concepto intuitivo de "finitud". Señala que uno logra una versión informal de algo como la teoría de conjuntos estilo Cantoriana —o Zermelo—, siempre y cuando aceptemos el axioma del infinito, es decir, la afirmación de que la colección de los números naturales es "finito" en un sentido relevante.

Además, señala que los antiguos griegos concibieron a los números no como un único referente numeral, sino como pluralidades "finitas" que son instancias de una especie general; y nos invita a:

> […] considerar la idea de número que fue suplantada por la idea moderna de número "natural", la concepción griega clásica de *arithmos*. En esa concepción, un número —*arithmos*— es una pluralidad finita —multitud, multiplicidad—, integrada por unidades, donde una unidad es lo que cuenta (!) como un objeto del número en consideración (p. 21).

Como resultado, la forma correcta de analizar y hablar de número es la que se expresa como "El número de caballos en el campo es un cinco", y no como "El número de caballos en el campo es cinco" (pp. 24-25). Mayberry repetidamente enfatiza que, en su opinión, la gramática aparente que habla de número es engañosa para Frege y el resto de nosotros, pero no para los antiguos griegos, quienes pensaban que éste es un objeto único que es el referente de "cinco".

Si los números son pluralidades, entonces la teoría de los números naturales es sólo la teoría de las pluralidades finitas —en el sentido moderno. Mayberry, sin embargo, insiste en la otra cara de esta idea explicativa: si las pluralidades "finitas" —en el sentido clásico o Cantoriano— son números, entonces esta informal teoría de conjunto es realmente una forma de la teoría de número —o cardinalidad—, lo que le permite afirmar en el prefacio que:

> […] todas las matemáticas se basan en la aritmética, debido a que el concepto central en matemáticas es el de una pluralidad limitada, o delimitada, o determinada, o definitiva —en una palabra, finita— en tamaño, el antiguo concepto de número —*arithmos*— (p. xix).

3. Cuestiones contemporáneas

La diferencia esencial en el enfoque de Mayberry, entre la teoría de conjuntos Catonriana moderna y la llamada consideración Euclidiana de número, es que Cantor amplió la noción de "finito" para incluir las pluralidades infinitas de Dedekind, es decir, un número infinito de pluralidades "finitas".

Para justificar los axiomas, Mayberry afirma que las pluralidades "finitas" compuestas de objetos físicos, aunque no objetos físicos en sí mismos, son, sin embargo, no más problemáticos que los objetos que los componen y, más generalmente, que la existencia de cualquier pluralidad no es más problemática que la existencia de los objetos que la componen, cuando esos componentes son objetos físicos, otras pluralidades o cualquier cosa.

> Entonces un número de caballos, por decir un cinco, ¿es un objeto físico? No, es un número, un cinco, de objetos físicos. Los números son *sui generis*; pero también lo es cualquier otro tipo básico de cosas: se dice que las cosas son de muchas formas (p. 35).

Aparentemente, las pluralidades sólo nos ofrecen: existe algo que es un cinco —una pluralidad que consta de cinco objetos— por encima de los cinco objetos que de alguna manera la componen, pero nuestro conocimiento de esta pluralidad no es más misterioso que el conocimiento de los objetos. Esta insistencia en la "facticidad" de pluralidades tiene como objetivo hacer frente a muchas de las preocupaciones filosóficas tradicionales acerca de los objetos matemáticos:

> Simplemente por ser objetos, y por tanto, por hipótesis, tienen, respectivamente, la pretensión de ser reales, de existencia independiente, y por ser, conjuntamente, finitos en multitud, las unidades de un *arithmos*, y colectivamente constituyen sólo una cosa bien definida, a saber, un objeto (p. 73).

Es en esta discusión de la teoría de conjuntos y la aritmética antigua que se encuentra el único defecto importante en el libro, aunque es una falta de omisión, no de comisión. Uno esperaría un libro argumentando que —al menos algunos— conjuntos —concebidos como pluralidades— se componen de objetos físicos para entablar una discusión de, por ejemplo, el realismo de Penélope Maddy (1990) en matemáticas. Del mismo modo, cabría esperar una posición que argumente que —en algún sentido— los números son conjuntos —puesto que los conjuntos son números, es decir pluralidades— para demostrar cómo la visión en cuestión maneja los puntos planteados en el ya clásico "Qué números pueden no ser" de Paul Benacerraf (1965). Sin embargo, ni Maddy ni Benacerraf se mencionan en alguna parte del texto.

Sin embargo, estos olvidos no son tan inexcusables ya que aparecen por primera vez. Mayberry tiene la intención de proporcionarnos un fundamento para las matemáticas, en el sentido de la "fundación" que estaba de moda hace medio siglo, no para resolver las cuestiones filosóficas acerca de la epistemología y la verdad que están más de moda actualmente. De hecho, Mayberry explícitamente sostiene que, al explicar los fundamentos de las matemáticas, se deben evitar tales complicaciones filosóficas (Secciones 1.3 y 3.7).

Como resultado, el lector debe acercarse a las primeras secciones del libro no como a una filosofía bien desarrollada de la matemática, sino como a un bosquejo informal de los puntos de vista filosóficos de Mayberry, que sirven como telón de fondo a su proyecto principal: proveer fundamentos matemáticos. Con esto en mente, tal vez deberíamos juzgar el libro por su original calidad, el contenido matemático. Sin embargo, independientemente de si Mayberry está en lo correcto al evitar la epistemología y lo relacionado con las cuestiones filosóficas, es probable que algunos lectores se pregunten acerca de cómo conectar el material contenido en las primeras secciones del libro al trabajo filosófico contemporáneo acerca de la naturaleza de los conjuntos.

4. El acierto de Mayberry

Afortunadamente, Mayberry presenta en la tercera parte del libro su nueva teoría de conjuntos, que es quizás la mejor parte del libro, ya que está cómodamente descrita en un entorno puramente matemático. Como se señaló anteriormente, los axiomas de la teoría informal de conjuntos de Mayberry se basan en una noción informal de "finito" o sin límites, y el salto revolucionario a lo tras-finito ocurrido cuando Cantor reconoce las estructuras infinitas de Dedekind en el ámbito de lo "finito". Mayberry, sin embargo, tiene dudas acerca de la legitimidad de este salto conceptual:

> […] existen evidencias de que algo puede estar mal en el paraíso de Cantor, evidencias que pueden, de hecho, albergar una falacia. Esta evidencia proviene de dos fuentes: de la matemática en sí y de la física. Esto no es decisivo, pero debe ser preocupante para un Cantoriano (p. 264).

Las preocupaciones a las que se refiere son: 1) la independencia de la hipótesis del continuo, y 2) el hecho de que la teoría de la relatividad y la teoría cuántica eliminan, respectivamente, la necesidad de la extensión infinita y la divisibilidad infinita en la naturaleza.

Como resultado de estas preocupaciones, Mayberry concluye el texto (Capítulos 8-12) mediante la investigación de lo que sucede cuando se sustituye la concepción Cantoriana liberal de "finito" con la original restricción de la Grecia antigua. En otras palabras, él investiga lo que se desprende de los axiomas teóricos de conjuntos estándar —o sus análogos informales— cuando sustituimos el axioma de infinito con el *axioma de finitud Euclidiana:*

$(\forall f)(\forall Y)((f\colon Y \rightarrow Y \wedge f \text{ es 1-a-1}) \rightarrow f \textit{ es sobre}$
(p. 227; reformulado ligeramente)

Este axioma intenta capturar el 5 Concepto Común de Euclides: El todo es mayor que la —propia— parte. Al investigar las consecuencias de esta teoría de conjuntos Euclidiana surge gran cantidad de resultados significativos, algunos de ellos bastante sorprendentes. Uno de los más interesantes es que:

> La teoría Euclidiana de sistemas infinitos simples, a diferencia de su contraparte Cantoriana, nos obliga a reconocer la existencia de sistemas de números naturales de diferentes longitudes (p. 382; énfasis añadido).

Este resultado, y otros como él, ofrecen mucha luz acerca del papel del axioma —tradicional— de infinito en la teoría de conjuntos. Además, la nueva teoría de conjuntos promete ser de interés para los matemáticos y los filósofos de tendencia constructivista. Sin embargo, Mayberry admite que queda mucho trabajo por hacer:

> […] todavía no sabemos lo suficiente acerca de cómo se pueden desarrollar las matemáticas en la teoría de conjuntos Euclidiana como para hacer una elección fidedigna entre la teoría y la ortodoxia Cantoriana. Pero creo que las perspectivas del desarrollo matemático de esta manera —por ejemplo la Euclidiana— son prometedoras, y de hecho, excitantes (p. 387).

El libro concluye con una larga lista de problemas no resueltos y problemas abiertos en de la teoría de conjuntos Euclidiana.

5. Conclusiones

El tratamiento de Mayberry a la teoría de conjuntos puede ser de interés para alguien que trabaje en los fundamentos de las matemáticas, especialmente los interesados en las diferentes concepciones que subyacen nuestra aceptación de los axiomas teóricos de conjuntos. Las partes del texto que se refieren al método axiomático y al papel de las fundaciones son excelentes, y demuestran que Mayberry está bien informado acerca del funcionamiento de la práctica de la matemática actual. Además, las posteriores secciones en las que describe la teoría Euclidiana de conjunto, se destacan tanto por la claridad de las matemáticas como por la novedad del punto de vista acerca de la teoría de conjuntos que presenta. Por último, aunque filosóficamente algunas cuestiones importantes se orientan en favor de las preocupaciones matemáticas, este trabajo matemático promete ser una importante contribución a nuestra comprensión de nociones como finitud, acotaciones, definitud, y de las matemáticas como un todo.

Referencias

- Benacerraf, P. (1965). What Numbers Could Not Be. Philosophical Review, No. 74, pp. 47—73.
- Cantor, G. (2006). Fundamentos para una teoría general de conjuntos: Escritos y correspondencia selecta. Madrid: Crítica. 320 p.
- Dedekind, R. (1963). *Essays on the Theory of Numbers*. USA: Dover Publications.
- Maddy, P. (1990). Realism in Mathematics. Oxford: Oxford University Press.
- Mayberry, J. P. (2000). The Foundations of Mathematics in the Theory of Sets. Cambridge: Cambridge University Press. Ω