# *COMPUTATION AND MATHEMATICS PARADOXES*

# COMPUTACIÓN Y PARADOJAS MATEMÁTICAS

***Jhon Sideleat Tasenm***
*Computational group, New York.*
Sideleat@engineer.com

(Artículo de REFLEXIÓN) (Recibido el 16 de febrero de 2010. Aprobado el 10 de mayo de 2010)

***Abstract* — *Computers are powerful and very practical machines, to the point that soon became indispensable for the modern society functioning. But even those who collaborated in the invention and progress, they forgot they were invented to help clarify a philosophical question related to the mathematical foundations***

***Keywords**: computation, logic paradoxes, mathematics paradoxes, paradoxes.*

**Resumen —** Los computadores son máquinas poderosas y muy prácticas, al punto que en poco tiempo se tornaron indispensables para el funcionamiento de la sociedad moderna. Pero hasta quienes colaboraron en su invención y progreso, olvidaron que se inventaron para ayudar a aclarar un asunto filosófico relacionado con los fundamentos matemáticos.

**Palabras clave**: computación, paradojas, paradojas lógicas, paradojas matemáticas.

## INTRODUCCIÓN

A principios del siglo XX, David Hilbert, un conocido matemático alemán, propuso que todo el razonamiento matemático debería formalizarse. Pero esa "*matemática y brillante idea*" resultó, en cierto sentido, un fracaso, ya que era imposible formalizar tal razonamiento. En otro sentido, resultó ser un gran éxito, debido a que el concepto del formalismo se convirtió en uno de los más grandes legados que dejó el siglo XX. Claro está, no para razonar o deducir matemáticamente sino para la programación y para el cálculo, es decir, para las ciencias computacionales; algo olvidado en la historia intelectual (Kleiner and Movshovitz, 1994).

Este artículo se refiere a esa historia, aunque sin los detalles matemáticos, y se explica a grandes rasgos la obra de algunos pensadores que hicieron aportes fundamentales para que su legado fuera una realidad. El objetivo es brindarle al lector las herramientas necesarias para que capte la esencia del aporte de dichos pensadores, y comprenda sus ideas acerca de la aleatoriedad propia de las matemáticas.

## PARADOJAS MATEMÁTICAS

En muchas ocasiones se interpreta el término paradoja como

> … algo que a primera vista parece ser falso pero que en realidad es cierto, o que parece ser cierto pero que en rigor es falso, o sencillamente que encierra en sí mismo contradicciones" (Russell, 1972).

No obstante, es necesario tener en cuenta que conceptos como certeza y falsedad, desde el punto de vista de las matemáticas, en un momento dado pueden relacionarse con su mismo grado de desarrollo. El término paradoja se origina en el latín *paradoxus*, que a su vez proviene del griego *paradoxos* —*παράδοξος*—. Etimológicamente, *paradoxos* significa lo que *parà ten doxan*, "*lo que va en contra de la opinión pública*".

Es decir, una paradoja es una proposición que aparentemente es verdadera, pero que conlleva a una contradicción lógica o situación en la que se vulnera el sentido común. Retóricamente, refleja un pensamiento que emplea expresiones o afirmaciones que encierran contradicciones. Estimula en gran medida la reflexión, al punto que los filósofos la utilizan frecuentemente para revelar la complejidad de una realidad (Northrop, 1991); también se emplea para hacer palpables las limitaciones que poseen las herramientas de la mente (De Lorenzo and Frege, 1995). Por todo esto, identificar paradojas con base en conceptos, aparentemente razonables y simples, contribuye a impulsar los más grandes avances en ciencia, filosofía y matemáticas.
Las paradojas matemáticas, lo mismo que las científicas, pueden conducir a los intelectuales hasta nociones muy profundas. Los números racionales se originaron de la paradoja de la demostración de que la diagonal de un cuadrado, cuyo lado fuera la unidad, no se podía medir exactamente. La

moderna teoría de conjuntos surge de la paradoja de que los elementos de un conjunto infinito A podían corresponder biunívocamente con los de algún subconjunto del mismo, mientras que por otro lado podían existir conjuntos infinitos para los que era imposible establecer la misma correspondencia (Suppes, 1968). A su vez, esta nueva teoría de conjuntos ejerció una profunda influencia en la filosofía de la ciencia.

Un aspecto bastante interesante de la matemática es que sus más difíciles paradojas conducen al origen de bellas y profundas teorías:

> El testamento de la ciencia es un flujo continuo, de tal manera que la herejía del pasado es el evangelio del presente y el fundamento del mañana (Kasner and Newmann, 1979).

Esos caminos que conducen a dichas teorías, son los que se discuten a continuación.

## PARADOJAS LÓGICAS

Bertrand Russell, que primero fue matemático, luego filósofo y posteriormente humanista, es una de las figuras clave en la cuestión de las paradojas matemáticas por haber descubierto, en la lógica misma, algunas bastante perturbadoras. Encontró casos en los que juicios, aparentemente impecables, conducían a contradicciones; su aporte fue fundamental para difundir la idea de que dichas contradicciones eran las causantes de graves crisis y que debían ser resueltas de alguna manera. Los descubrimientos paradójicos de Russell llamaron la atención de los intelectuales en los círculos matemáticos, aunque sólo una lleva su nombre:

> … consideremos el conjunto de todos los conjuntos que no son un elemento de sí mismos. Preguntemos entonces: ¿es este conjunto elemento de sí mismo? Si fuera elemento de sí mismo, no lo sería, y recíprocamente (Shapiro, 1997).

Este conjunto de todos los conjuntos que Russell menciona en su paradoja, puede asimilarse con la situación hipotética del barbero en un pueblo apartado: afeita a todo aquel que no se rasura a sí mismo. Este hecho es razonable hasta cuando se hace la pregunta: ¿será que el barbero se afeita a sí mismo? Se afeitará a sí mismo si, y sólo si, no se afeita a sí mismo. Entonces podría decirse: ¿y a quién le interesa tal hipotético barbero? Todo se reduce a un juego absurdo de palabras. Pero este no es el caso, ya que de lo que se trata es de dilucidar el concepto matemático de conjunto, y no es tan fácil pasar por alto este problema lógico.

La paradoja de Russell tiene origen en otra de la antigua Grecia, aunque no aplicada a la teoría de conjuntos, conocida como la paradoja de Epiménides o del mentiroso: ¡Esta afirmación es falsa! Si la aseveración es falsa, entonces debe ser verdadera; pero, si es verdadera, entonces es falsa. En cualquiera de las hipótesis acerca de su veracidad, se está ante un conflicto. Todas estas paradojas son posibles de diseñar considerándolas como un juego de palabras sin significado, pero muchos de los más grandes intelectuales del siglo XX las tomaron seriamente (Burton, 2002). Entre ellos, y como respuesta a la crisis de la lógica, apareció la tentativa de Hilbert, quien trató de pasarla por alto utilizando formalismos:

> Si se encuentran conflictos al seguir razonamientos que parecen correctos, la solución debe ser utilizar la lógica simbólica para generar un lenguaje artificial, y especificar sus reglas con sumo cuidado, de tal forma que no surjan contradicciones. Al fin de cuentas, el lenguaje natural es ambiguo, y no siempre se sabe con certeza qué antecede a un pronombre" (Sainsbury, 1995).

## LA IDEA DEL RESCATE DE HILBERT

Hilbert tenía la idea de crear un lenguaje artificial perfecto para el razonamiento, la deducción y la matemática, y hacía hincapié en que el método axiomático era muy importante, ya que con él era posible partir de un conjunto de axiomas —postulados básicos— y fórmulas bien formadas, para deducir y derivar teoremas efectivos. Tenía, entonces, la intención de ser bastante riguroso en cuanto a las reglas del juego —es decir, definiciones, conceptos elementales, gramática y lenguaje—, de tal forma que se produjera un acuerdo general acerca de cómo debía trabajarse en matemáticas. Claro está que, en la práctica, su idea resultaba muy laboriosa, ya que utilizar tal sistema axiomático para encontrar nuevas teorías matemáticas era muy complicado, pero desde el punto de vista filosófico podía ser muy importante (Carrera, 2001).

Aunque esta propuesta no parecía muy trabajosa —ya que era una continuidad de una tradicional formalización matemática que se sustentaba en la larga historia del trabajo de anteriores pensadores como Leibniz, Boole, Frege, y Peano—, lo que Hilbert buscaba era trazar un camino completo, desde el principio hasta el fin, para formalizar totalmente la matemática; pero tal empresa no resultaba posible, ya que su idea estaba errada. No obstante, esa equivocación fue de gran utilidad, ya que planteaba una pregunta muy acertada que al formularla, crearía una disciplina totalmente nueva: la metamatemática, un área reflexiva de la matemática dedicada a estudiar lo que ésta puede o no alcanzar (Bunch, 1987).

Otra cuestión por la que su idea no era posible, consiste en que si se instaura un sistema axiomático totalmente formal, su significado pierde validez, y su consideración se limita a un simple juego en el que sus piezas serán marcas sobre un papel de las que es posible deducir teoremas desde los axiomas, claro que con el significado que le confiere la matemática. Pero para estudiar la matemática a través de métodos matemáticos, lo que se requiere es extraer su significado, y limitarse al estudio de un lenguaje artificial estructurado mediante reglas absolutamente precisas.

Las cuestiones que se podrían plantear entonces serían, por ejemplo, si es posible demostrar que 0 = 1. Es decir, que dada una proposición A, cabe la pregunta de si es posible demostrar o a A, o a ¬A, lo que daría completitud al sistema axiomático formal (De Lorenzo and Frege, 1995). La propuesta de Hilbert buscaba crear reglas tan precisas que las demostraciones sólo tendrían que someterse a un veredicto imparcial, en el que un procedimiento mecánico confirmara la veracidad o no de la afirmación, y que no tendría apelación.

Claro que Hilbert no creía que toda creación matemática se llevara a cabo de ese modo; él pensaba que si fuese posible hacer matemática de esa forma, podría utilizarse para estudiar su propio poder, por lo que concluyó que ni él mismo sería capaz de concretar esa empresa (Yandell, 2002). Para complementar su desconcierto, en 1931 Gödel, un matemático austríaco, demostró que su idea del rescate de ningún modo era razonable, y que ni siquiera se podría iniciar.

## GÖDEL Y LA INCOMPLETITUD

El descubrimiento que Gödel realizó fue extraordinario. Demostró que Hilbert se equivocaba totalmente, ya que de ninguna forma puede existir un sistema axiomático que cobije la totalidad de la matemática, con el que sea posible demostrar, claramente, si una afirmación es verdadera o falsa. Demostró además que la idea fallaría aunque se limitara a la aritmética elemental, a los números 0, 1, 2, 3..., a la adición y a la multiplicación.

> Cualquier sistema formal que busque contener la absoluta verdad y nada más que la verdad en lo relacionado con la adición, la multiplicación y los números 0, 1, 2, 3,..., tiene que ser incompleto (Casti and DePauli, 2000).

Como será incoherente e incompleto, no es posible que solamente diga la verdad, ya que no dirá toda la verdad. Ello lleva a suponer que si con los axiomas y reglas de deducción no es posible demostrar los teoremas falsos, también habrá teoremas que a pesar de ser verdaderos no se podrán demostrar.

Gödel recurrió ingeniosamente a la paradoja del mentiroso para la demostración de la incompletitud, y construyó una afirmación que dice de sí misma que es indemostrable. De esta demostración es posible extraer complicados detalles técnicos, tanto que al leer el artículo original de Gödel (1931), se encuentran indicios de algo que tiene parecidos a la estructura del lenguaje de programación LISP; su demostración utiliza la recursividad en muchas de las funciones que trabajan sobre listas, precisamente lo mismo que hace LISP. Aunque en 1931 no existían computadores ni lenguajes de programación, en retrospectiva este artículo refleja claramente un lenguaje con la estructura de la programación que muchos años después se comenzó a utilizar.

La importancia del aporte de Gödel fue inmediatamente reconocida por John von Neumann, quien, aunque abiertamente jamás había planteado que la idea de Hilbert fuera errónea, encontró que Gödel, además de demostrar gran inteligencia, fue muy valiente al demostrar que éste estaba equivocado (Nagel y Newman, 1958). Aunque en su época muchos consideraron que el aporte de Gödel era absolutamente catastrófico, debido a que la tradicional filosofía matemática quedaba reducida a escombros, existían otros problemas que exigían más atención: la cercanía de una guerra en medio de una gran depresión económica.

**LA MÁQUINA DE TURING**

Otro de los aportes importantes a la relación que aquí se analiza, se dio cinco años después en Inglaterra. En 1936, Alan Turing descubrió lo que más tarde se conocería como la no-computabilidad. De acuerdo con Hilbert, era posible que existiera "*un procedimiento mecánico*" tal que fuese capaz de decidir si una demostración cualquiera seguía o no las reglas, pero nunca aclaró aquello que entendía por procedimiento mecánico; no obstante Turing dio la definición y en esencia dijo que se trataba de una máquina (Turing, 1936).

Al igual que el artículo de Gödel, el de Turing describe lo que hoy se conoce como lenguaje de programación, aunque no tengan nada más de parecido. Mientras que el primero podría considerarse como un lenguaje de alto nivel, el segundo se trata más bien de un lenguaje de máquina bastante rudimentario. Aunque la máquina computacional hipotética de Turing era sencilla, con un lenguaje bastante primitivo, no dejaba de ser versátil, al punto que él mismo afirmaba que tal máquina era capaz de llevar a cabo cualquier cómputo que pudiera realizar un ser humano. Y es aquí donde su razonamiento gira violentamente, ¿qué es lo que esta máquina no puede realizar? A lo que el mismo Turing encuentra respuesta, y detalla un problema que ninguna máquina podría resolver: el de la detención. Es decir, que una máquina no puede decidir de antemano cuando detenerse luego de que encuentra la solución buscada (Pour-El and Richards, 1989).

Su idea era una máquina que fuera capaz de ejecutar, sobre una cinta infinitamente larga, operaciones casilla a casilla. Dicho aparato podría leer el contenido de cada casilla de la cinta y, de acuerdo con el estado interno de la máquina, la modificaría o la dejaría igual, luego corre la cinta un espacio hacia uno de los lados en un proceso repetitivo. Él demostró que para ejecutar cualquier proceso de cálculo, un autómata podría utilizar dicho aparato sólo con proporcionarle un adecuado conjunto de instrucciones básicas. Para poder detener la ejecución del proceso, se imaginó que era necesario imponerle un límite de tiempo, con lo que solucionaba el problema antes mencionado. Además, Turing se percató que es posible encontrar una dificultad bastante seria al no colocar límite al tiempo de ejecución, ya que no es posible deducir si el programa se detendrá o no con sólo limitarse a ponerlo en funcionamiento (Turing, 1936).

¿Cuál es entonces el razonamiento de Turing? Supóngase que es posible crear un programa de computador que pueda deducir si otro programa cualquiera en algún momento se detendrá, o sea un verificador de detención. Teóricamente funcionaría de esta forma: se le suministra un programa y deduce la respuesta de "*sí, el programa analizado se detendrá*", o "*no, ese programa se quedará en un bucle infinito y no se detendrá*". En otro escenario, se modifica el verificador de tal forma que cuando analice un programa que se detiene, entre en un bucle infinito; es decir, si se le pide que analice una copia de sí mismo, ¿qué hará? Debido a que si termina, entra en un bucle infinito, entonces se genera una contradicción. Si, por el contrario, el programa no termina, el verificador lo indica, y el programa verificado no entra al bucle, por lo que llega a su término. Esta paradoja le llevó a deducir que era imposible diseñar un verificador de detención universal (Teuscher, 2004).

Turing dedujo entonces que si no había forma de conocer, mediante cálculos, si un programa se detendría o no, tampoco podía existir forma alguna de conocerlo mediante razonamientos. No existe un sistema axiomático formal que permita decidir si un programa terminará deteniéndose o no, ya que si esto fuera posible, dicho sistema debería proporcionar también la forma de calcular de antemano si el programa se detendrá (vos Savant, 1993). Una cuestión que a la luz de toda razón es imposible, pues se originaría una paradoja de la forma del mentiroso: "*Es posible crear un programa que se detenga si y sólo si no se detiene*". Paradoja que es similar a la investigación de Gödel acerca de la teoría de números, pero de la que se diferencia porque demuestra que no existe un sistema axiomático formal que sea completo.

## LA MATEMÁTICA ALEATORIA

Todos los matemáticos que hasta ese entonces se habían preocupado por tales cuestiones filosóficas, tuvieron que aplazar sus investigaciones debido al advenimiento de la Segunda Guerra Mundial. Turing se dedicó a trabajar en criptografía, von Neumann a calcular detonaciones de bombas atómicas y los otros corrieron igual suerte; por lo que el problema de la incompletitud de los sistemas axiomáticos quedó de lado por un tiempo.

A mediados del siglo XX, Gregory J. Chaitin, un matemático americano, se encontró con un artículo acerca de Gödel y la incompletitud que lo dejó fascinado. Aunque no lo había comprendido en su totalidad, le pareció que había algo dudoso en su contenido. También había leído el método de Turing, al que consideró mucho más profundo, pero aun así no estaba satisfecho. Chaitin es considerado el principal arquitecto de la teoría algorítmica de la información (Chow, 1998), que es de su autoría y que transformó para aplicarla a programas reales de computador.

Luego de estas lecturas, se le ocurrió una curiosa idea acerca de la aleatoriedad. Siendo muy joven había leído acerca de los fundamentos de la física —la Teoría de la Relatividad, la cosmología y la mecánica cuántica—, y comprendió que si las cosas son muy pequeñas, el comportamiento del mundo físico es desconcertante, aleatorio, impredecible. Entonces, se le ocurrió considerar una posible aleatoriedad en la matemática pura, y comenzó a sospechar que pudiera ser la causa no descubierta de la incompletitud. Pensó que dicha aleatoriedad inherente a la matemática podía proporcionar una razón profunda del por qué de la incompletitud, y a mediados de los sesenta, junto al ruso A. N. Kolmogoroff pero de forma independiente, aportaron las ideas que dieron origen a la "*Teoría Algorítmica de la Información*", conocida como "*complejidad computacional*" (Ladrière, 1969).

Una de las primeras referencias a la complejidad algorítmica la proporciona von Neumann (MacRae, 2000), en la que describe que Turing "*consideraba al computador como un simple concepto matemático*", una máquina perfecta que no comete errores, que dispone de espacio y tiempo tanto como necesite. Luego que Turing promulgara esta idea, para un matemático el siguiente paso lógico sería calcular el tiempo que se requiere para efectuar un cálculo, que sería una medida de su complejidad. von Neumann (1951) recalcó la importancia de la complejidad temporal de los cálculos, la misma que hoy se ha convertido en una especialidad desarrollada e investigada.

Pero aunque, desde una visión práctica, estudiar el tiempo es muy importante, también lo es el tamaño de los programas —la cantidad de información necesaria para que un computador realice determinada tarea—, ya que la noción de complejidad, coligada al tamaño de los programas, se vincula con el concepto de entropía de la física. Dicho concepto desempeñó un importante papel en los trabajos de un físico del siglo XIX, Ludwig Boltzmann (Chaitin, 1975), lo mismo que en la mecánica estadística y en la termodinámica.

La entropía es la encargada de medir el grado de desorden, de caos, y de aleatoriedad en un sistema físico, y guarda relación con una importante cuestión filosófica: ¿por qué el tiempo marcha un solo sentido? Existe, desde luego, diferencia entre la regresión y la progresión en el tiempo. Igualmente, para Boltzmann, la entropía forzosamente se tiene que incrementar: "*el sistema debe adquirir cada vez mayor desorden*", lo que se denomina Segundo Principio de la Termodinámica (Chaitin, 1975). En su teoría de los gases, Boltzmann afirma que "*existe una dirección en el tiempo en la que un sistema parte de un estado ordenado y termina en uno desordenado y mezclado*", situación que se conoce como "*muerte térmica*".

La relación entre las ideas de Chaitin y la teoría de Boltzmann se presenta cuando el primero hace la analogía entre el tamaño de un programa informático con el grado de desorden de un sistema físico (Chaitin, 1988). Para especificar el lugar en que se encuentran todos los átomos de un gas, cuya estructura es complicada, es necesario construir un programa enorme; por el contrario, para especificar los de un cristal, cuya estructura es uniforme, el programa sería pequeño. Es la base en la que Chaitin (1975) soporta su teoría de que entropía y tamaño de programa se encuentran íntimamente relacionados.

Según Chaitin, la noción de complejidad, medida con relación al tamaño del programa, también guarda concordancia con una idea de la filosofía del método científico, que fue propuesta en 1960 por Ray Solomonoff, y que remite a pensar en el principio de "*la navaja de Occam*": la teoría más sencilla es la mejor (Cañón, 1993). Es decir, si se asume que una teoría es un programa informático para predecir observaciones, la afirmación de que la mejor teoría es la más sencilla se convierte en que un programa informático reducido es el más adecuado.

Pero existe un problema: ¿qué pasa si no existe una teoría reducida, si el programa más pequeño capaz de reproducir el conjunto de datos tiene el mismo tamaño de dicho conjunto? Entonces esta teoría no sería aplicable; los datos serían aleatorios e imposibles de comprender. Así que la teoría es buena, sólo si en su aplicación es posible comprimir los datos hasta un programa mucho menor, y se tienen hipótesis teóricas y reglas de deducción.

La idea de Chaitin consiste en usar la complejidad, medida por el tamaño del programa, para definir la aleatoriedad. A medida que se examina el tamaño del programa —es decir, cuando se tiene en cuenta el concepto de su tamaño o complejidad de información, en lugar de su complejidad determinada por el tiempo de ejecución—, es posible determinar que en todas partes aparece la incompletitud (Chaitin, 1975). Esto se debe a que la complejidad de algo se mide por el tamaño mínimo del programa utilizado para calcularlo, lo que ya de por sí genera un conflicto: no es posible estar seguros de que se tiene el programa más pequeño, ya que es una tarea que escapa al alcance del razonamiento matemático.

Chaitin, al deducir que la demostración de por qué se presenta este conflicto es muy compleja, se limita a mencionar el resultado de uno de sus enunciados de incompletitud: "*Si se tienen n bits de axiomas, nunca será posible demostrar que un programa es el más pequeño si su tamaño supera n bits*" (Chow, 1988). Es decir, cuando el programa supera el tamaño de los axiomas, se tienen dificultades; más exactamente, aparecen problemas si supera el tamaño del programa de comprobación-demostración de los axiomas y de sus reglas de deducción.

Por todo esto, concluye que no es posible, en general, calcular la complejidad medida por el tamaño de programa, ya que determinar de esta forma la complejidad es equivalente a conocer el tamaño del más pequeño de todos los programas que la calculan, lo que no es posible si el programa es más grande que los axiomas que calcula.

> Si hay n bits de axiomas, nunca se podrá determinar la complejidad, medida por el tamaño del programa, de nada que tenga más de n bits de complejidad, que es casi todo (Chow, 1988).

Además, explica esta afirmación al expresar que los conjuntos de axiomas que se utilizan en matemáticas son muy concisos, ya que de no serlo nadie creería en ellos. En la práctica, existe un amplio universo de verdades matemáticas que conforman cantidades infinitas de información, mientras que, de otro lado, un determinado conjunto de axiomas abarca sólo una finita y diminuta cantidad de esa información. En pocas palabras, ésta es la razón por la que el teorema de incompletitud de Gödel no es misterioso y complicado, sino natural e inevitable (Casti and DePauli, 2000).

## CONCLUSIONES

Esta última afirmación es impresionante, ya que es posible, sólo en tres pasos, ir del teorema de Gödel, con todo y sus límites al razonamiento, hasta Turing, donde parece mucho más razonable, y de éste a la consideración de la complejidad medida por el tamaño del programa donde, los límites de la matemática, son más notorios.

Esta teoría de información algorítmica resulta interesante y revela que existen innumerables cosas que no se pueden demostrar, pero no permite alcanzar conclusiones acerca de cuestiones matemáticas sueltas. Hoy se necesitan resultados concretos, ajenos a su juicio, del alcance del razonamiento matemático.

Aun con todo, y a pesar de la incompletitud, los matemáticos continúan logrando muchos progresos. Parece que estos resultados de incompletitud llevan consigo un pesimismo adherido. Al leerlos literalmente, dan la impresión de que no existe forma de avanzar, que la matemática es imposible; pero para los matemáticos no parece que se cumpla esa maldición, y su trabajo sigue en progreso constante.

**REFERENCIAS**


1. Bunch, B. H. (1987). Matemática insólita. Paradojas y paradojismos. Barcelona: Editorial Reverté, S.A.
2. Burton, D. M. (2002). The history of mathematics. USA: Brown Publishers.
3. Cañón, C. (1993). La matemática creación y descubrimiento. Madrid: Universidad Pontificia de Comillas.
4. Carrera, J. P. (2001). El infinito y la lógica de primer orden. Ideas del infinito. Investigación y ciencia, Temas 23, pp. 23-37.
5. Casti, H. L. and DePauli W. (2000). Gödel: A life of logic. Cambridge: Perseus Publishing.
6. Casti, H. L. and DePauli, W. (2000). Gödel: A life of logic. Cambridge: Perseus Publishing.
7. Chaitin, G. J. (1975). Randomness and mathematical proof. Scientific American, Vol. 232, No. 5, pp. 47-52.
8. Chaitin, G. J. (1988). Aritmética y azar. Investigación y Ciencia, No. 144, pp. 44-50.
9. Chow, T. Y. (1998). The Surprise Examination or Unexpected Hanging Paradox. The American Mathematical Monthly, Vol. 105, pp. 41-51.
10. De Lorenzo, J. and Frege G. (1995). Grandes Matemáticos. Investigación y Ciencia. Barcelona: Temas 1.
11. Gödel, K. (1931). Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. Monatshefte für Mathematik und Physik, Vol. 38, pp. 173-98.
12. Kasner, E. and Newmann J. (1979). Paradoja perdida y paradoja recuperada. Barcelona: Sigma Vol. 5.
13. Kleiner, I. and Movshovitz N. (1994). The role of paradoxes in the evolution of mathematics. The American Mathematical Monthly, Vol. 101, pp. 963-974
14. Ladrière, J. (1969). Limitaciones internas de los formalismos. Madrid: Editorial Tecnos.
15. MacRae, N. (2000). John von Neumann: The Scientific Genius Who Pioneered the Modern Computer, Game Theory, Nuclear Deterrence, and Much More. New York: American Mathematical Society.
16. Nagel, E. y Newman J. R. (1958). La demostración de Gödel. Sigma, el mundo de las matemáticas, Vol. 5, pp. 57- 84.
17. Northrop, E. P. (1991). Paradojas Matemáticas, México: Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana.
18. Pour-El, M.B. and Richards J. I. (1989). Computability in Analysis and Physics. New York: Springer.
19. Russell, B. (1976). La evolución de mi pensamiento filosófico. Madrid: Alianza Editorial.
20. Sainsbury, R. M. (1995). Paradoxes. Boston: Cambridge University Press.
21. Shapiro, S. (1997). Philosophy of Mathematics. Oxford: Oxford University Press.
22. Suppes, P. (1968). Teoría axiomática de conjuntos. Cali: Editorial Norma.
23. Teuscher, C. (2004). Alan Turing: Life and Legacy of a Great Thinker. London: Springer-Verlag.
24. Turing, A. M. (1936). On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem. Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. 2 No. 42, pp. 230-265.
25. von Neumann, J. (1951). Various techniques used in connection with random digits. National Bureau of Standards Applied Math Series, No. 12, pp. 36-38.
26. vos Savant, M. (1993). The World's Most Famous Math Problem. New York: St. Martin's Press, pp. 48-50.
27. Yandell, B. H. (2002). The Honors Class: Hilbert's Problems and Their Solvers. New York: A K Peters.


Ω