

Métodos de Clapeyron y Cross para el análisis de vigas de inercia variable

Clapeyron and Cross methods for the analysis of beams with variable inertia

*Josep Maria Pons-Poblet**, *Milad Soltanalipour***

(Recibido el 01-06-2021. Aprobado el 08-10-2021)

Estilo de citación de artículo:

J. M. Pons-Poblet y M. Soltanalipour, "Métodos de Clapeyron y Cross para el análisis de vigas de inercia variable", *Lámpsakos*, no. 26, pp. 69-88, 2021.
DOI: 10.21501/21454086.3987

Resumen

En el mundo académico con frecuencia se plantea el análisis global de estructuras con vigas consideradas de inercia constante I . La múltiple bibliografía docente así lo atestigua. A pesar de ello, también se presentan casos en los que esta se considera como variable $I(x)$. Dicha casuística pudiere ser extrapolada al caso de las estructuras reales. Muchas de estas poseen las vigas con canto constante, aunque algunas, por motivos variados, lo presentan variable. Este hecho ha complicado de manera notable la formulación y resolución del problema estructural en los métodos clásicos.

Se plantea en este trabajo un abordaje histórico del mismo, presentando dos de estos métodos de resolución de estructuras hiperestáticas (el de Clapeyron conocido también como de los Tres Momentos y el de Cross), así como su formulación y resolución para el caso de vigas continuas de Inercia constante I y variable $I(x)$.

Palabras clave:

Cross; Clapeyron; Tres momentos; Inercia constante; Inercia variable.

* Doctor Ingeniero Industrial. Profesor en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial (ETSEIB) - Universidad Politécnica de Cataluña.
Contacto: josep.maria.pons@upc.edu, Orcid: <https://orcid.org/0000-0003-1876-0772>

** Ingeniero Civil. Profesor asociado en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial (ETSEIB) - Universidad Politécnica de Cataluña.
Contacto: milad.soltanalipour@upc.edu, Orcid: <https://0000-0002-4908-4546>

Abstract

In the academic world, the global analysis of structures with beams considered to have constant inertia I is frequently considered. This is attested by the multiple teaching bibliography. In spite of this, there are also cases where this is considered as variable $I(x)$. This casuistry could be extrapolated to the case of real structures. Many of them have beams with constant depth, although some of them, for various reasons, have variable depth. This fact has considerably complicated the formulation and resolution of the structural problem in the classical methods.

This paper presents a historical approach to this problem, presenting two of these methods for solving hyperstatic structures (Clapeyron's method, also known as the Three Moments method and Cross's method), as well as their formulation and solution for the case of continuous beams with constant I and variable $I(x)$ inertia.

Keywords:

Cross; Clapeyron; Three Moments; Constant inertia; Variable inertia.

1. INTRODUCCIÓN

La formulación de las ecuaciones de la estática, $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum M_z = 0$ ha permitido de manera ágil la resolución de las estructuras llamadas isostáticas, aquellas donde el número de incógnitas fuere tres. El problema surge en las estructuras hiperestáticas, en las cuales el número de reacciones incógnitas (>3) hace insuficientes las anteriores relaciones estáticas para su obtención (figura 1).

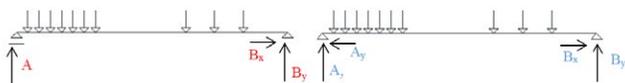


Fig. 1 Estructura isostática (izquierda) versus estructura hiperestática (derecha)

El cálculo hiperestático podía llegar a implicar un esfuerzo tedioso cuando se disponía de las ecuaciones de la estática y de algunas formulaciones deducidas de la Resistencia de Materiales. Podríamos citar los teoremas de Mohr, el teorema de Castigliano o la integración de la ecuación de la elástica, entre otras [1]. Era necesaria la formulación de nuevas metodologías más rápidas que, sin perder un ápice de rigor, permitiesen el análisis global del elemento estructural considerado cuando sus ligaduras le hacían ser hiperestático.

En 1857, el francés Benoit Clapeyron presentó un artículo titulado *Calcul d'une poutre élastique reposant librement sur des appuis inégalement espacés*, en la publicación *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*. El teorema de *los Tres Momentos*, nombre comúnmente usado para indicar el Teorema de Clapeyron, supuso un hito en el cálculo estructural, ya que permitía de manera ágil y rigurosa la resolución del problema hiperestático (al menos en gran parte de problemas).

En mayo de 1930, Hardy Cross publicó en la American Society of Civil Engineers un artículo titulado *Analysis of continuous frames by distributing fixed-end moments*. Este supuso una revolución en el mundo estructural, parecida a la que en el siglo anterior produjo

la publicación de Benoit Clapeyron, pues permitía la resolución del problema hiperestático en su globalidad y con una relativa rapidez.

Llegados a este punto, podemos afirmar que el problema del cálculo estructural referido a vigas y pórticos (intranslacionales e incluso translacionales) estaba resuelto. Hasta la implementación de los métodos numéricos (cálculo matricial, elementos finitos), esta metodología permitía la resolución de los problemas, tal y como las memorias de cálculo reales consultadas lo han demostrado [1].

Los ejemplos presentados en las figuras siguientes (fig. 2 y fig. 3) muestran dos documentos de época de cálculos realizados con ambos métodos.

El primero corresponde a una parte del cálculo del *hangar para el aeroclub de Cuatro Vientos (Madrid)*, obra de D. Eduardo Torroja (1899-1961) y sito en el archivo homónimo [2]. Realizado en noviembre de 1949, nos presenta una solución al problema estructural resuelta por el método de Clapeyron.

Cargas continuas (4)

$u = 117,2 \text{ kg/m.l.}$

$10,92M_A + 4,25M_B = 2.300$	
$4,25M_A + 13,33M_B + 2,42M_C = 2.660$	
$2,42M_B + 13,33M_C + 4,25M_D = 2.660$	
$4,25M_C + 15,75M_D = 2.660$	$M_D = 169 - 0,27M_C = 133$
$2,42M_B + 12,18M_C = 1.942$	$M_C = 159,5 - 0,1987M_B = 135$
$4,25M_A + 12,85M_B = 2.274$	$M_B = 177 - 0,331M_A = 123$
$9,515M_A = 1.548$	$M_A = 163$
	IP8 A = 835

Fig. 2 Ejemplo de cálculo de una viga por el método de Clapeyron [2]

El segundo, fechado en 1963, corresponde a un ejemplo de cálculo con el método de Cross obtenido de material docente de la asignatura *Estructuras* impartida en el curso 1963-64 en la Escuela Técnica Industrial de Barcelona [3].

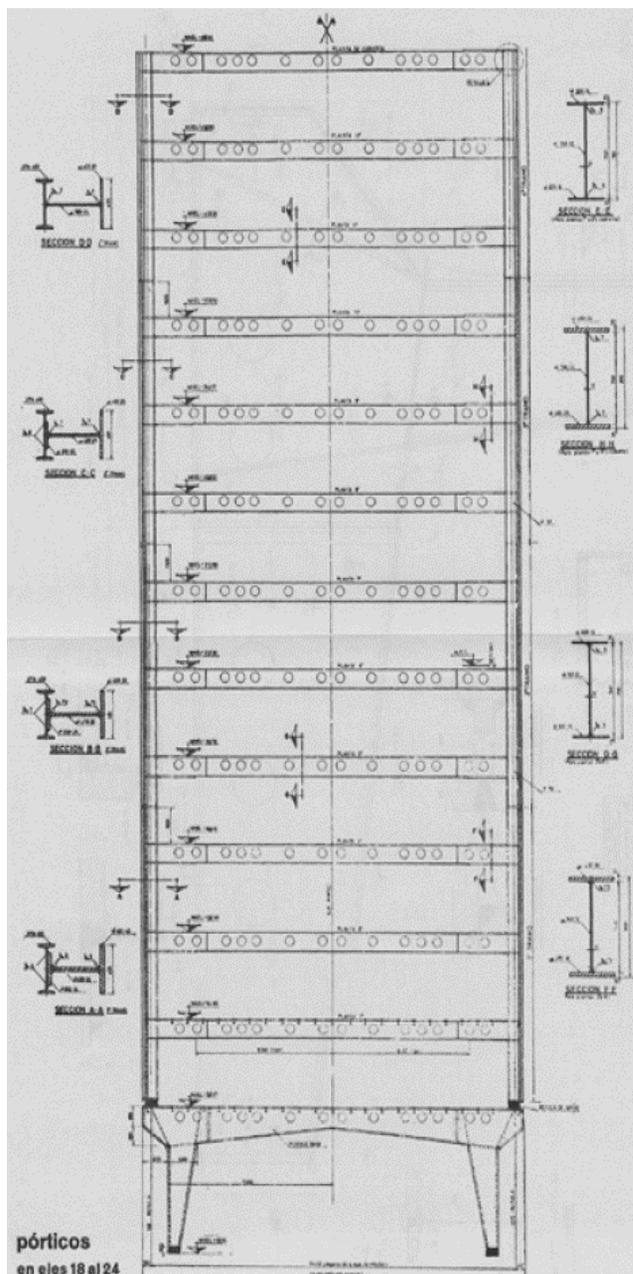


Fig. 7 Edificio social de la Mutua General de Seguros

Ahora bien, el hecho de proceder con vigas de sección variable, complica notablemente el cálculo analítico.

Teorema de los Tres Momentos

A mediados del siglo XIX, el francés Benoit Paul Émile Clapeyron (1799-1864) presentó un teorema que permitía la resolución de la tipología hiperestática de manera rigurosa y ágil.

MÉMOIRES LUS.

MÉCANIQUE. — *Calcul d'une poutre élastique reposant librement sur des appuis inégalement espacés; par M. CLAPEYRON.*

(Renvoi à l'examen de la Section de Mécanique.)

Fig. 8 Hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences [8]

Clapeyron justifica el objetivo de su trabajo.

En esta primera Memoria, que se resume a continuación, examino en primer lugar el caso de una viga recta colocada sobre dos apoyos en sus extremos, *su sección es constante*, soporta una carga uniformemente repartida; además, se da el momento de las fuerzas que actúan en los dos extremos en línea con los apoyos [8].

La solución del problema general se reduce de esta manera a la determinación de los momentos de las fuerzas que tiendan a producir la fractura de la viga en cada uno de los soportes sobre los que descansa. Esto se consigue expresando que las dos curvas elásticas que corresponden a dos tramos consecutivos sean tangentes una con la otra en el soporte intermedio, y que los momentos sean iguales [8].

Llegando a la siguiente conclusión.

Soient l_0 et l_1 les ouvertures de deux travées consécutives, soient pour chacune d'elles p_0 et p_1 les charges par mètre courant, soient Q_0 , Q_1 et Q_2 les moments correspondants à chacun des trois appuis consécutifs, on aura la relation

$$l_0 Q_0 + 2(l_0 + l_1) Q_1 + l_1 Q_2 = \frac{1}{4}(p_0 l_0^3 + p_1 l_1^3).$$

Fig. 9 Formulación del teorema de los tres Momentos o Teorema de Clapeyron.

Sean l_0 y l_1 las aberturas (luces) de dos tramos consecutivos, sean para cada uno de ellas p_0 y p_1 las cargas por metro lineal, sean Q_0 , Q_1 y Q_2 los momentos correspondientes a cada uno de los tres soportes consecutivos, se tendrá la relación:

$$l_0 Q_0 + 2(l_0 + l_1) Q_1 + l_1 Q_2 = \frac{1}{4} (p_0 l_0^3 + p_1 l_1^3) \quad (1)$$

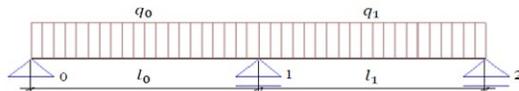


Fig. 10 Viga con tres puntos de apoyo y con carga uniforme.

Se postulaba el llamado *Teorema de los Tres Momentos* conocido también como Teorema de Clapeyron en honor al francés. Con dicha formulación, la ciencia de las estructuras daba un vuelco radical ya que permitía, como se ha hecho notar, resolver el tedioso problema hiperestático que tantas dificultades había dado hasta el momento. Nos encontramos en el año 1857. Usando el teorema precedente, podemos encontrar el valor del momento global en 1 (figura 10). Este hecho nos permite hallar la reacción total en el citado apoyo y, posteriormente, en los restantes solo con aplicar las relaciones estáticas precedentes.

Justo es citar que a veces se atribuye el resultado a Henri Bertot, pues en 1855 publicó un artículo parecido en la misma revista. A pesar de ello, la mayoría de expertos atribuyen a Clapeyron el Teorema [9].

Fundamentos del método

Partamos de la conocida relación resistiva que nos proporciona la *ecuación de la elástica*, donde los momentos de flexión son descompuestos en los correspondientes a los de una viga apoyada libremente (M) y los causados por los pares de empotramiento (μ)

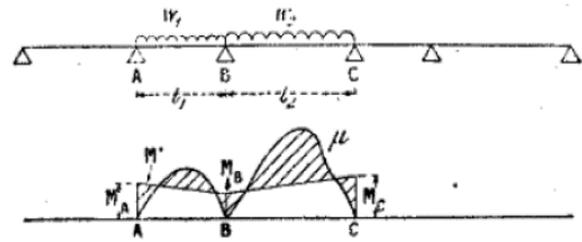


Fig. 11 Tramos de viga continua sometidos a carga repartida uniforme

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M + \mu \quad (2)$$

Pasemos a su resolución en ambos casos estudiados.

Vigas de inercia constante I

Estudiemos la relación anterior (2); primero en el tramo BC y a continuación en el BA (figura 11). En el primer caso, tenemos las siguientes relaciones de M y μ :

$$M = -\frac{q_2}{2} (l_2 x - x^2) \quad (3)$$

$$\mu = M_B + (M_C - M_B) \frac{x}{l_1} \quad (4)$$

Estas, sustituidas en la ecuación de la elástica correspondiente (2), nos permiten obtener la relación:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{q_2}{2} (l_2 x - x^2) + M_B + (M_C - M_B) \frac{x}{l_1} \quad (5)$$

Procedemos a la integración de la ecuación anterior. En este punto remarcamos el hecho de trabajar con una viga de inercia constante, *sa section est constante* indicábamos en la justificación del propio Clapeyron, pues en este paso específico encontramos la diferencia con las vigas de inercia variable (2.3).

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{q_2}{4} l_2 x^2 + \frac{q_2}{6} x^3 + M_B x + (M_C - M_B) \frac{x^2}{2l_1} + C \quad (6)$$

DOI: <https://doi.org/10.21501/21454086.3987>

Donde para $x = 0$,

$$EI \frac{dy}{dx} = C = EI i_B \quad (7)$$

Integrando nuevamente encontramos la relación:

$$EIy = -\frac{q_2}{12} l_2 x^3 + \frac{q_2}{24} x^4 + \frac{M_B}{2} x^2 + (M_C - M_B) \frac{x^3}{6l_2} + EI_B x + C' \quad (8)$$

En este caso, se deduce que para $x = 0, y = 0$. Por lo tanto $C' = 0$. Finalmente, y teniendo presente que para $x = l_2, y = 0$ a la vez que agrupando términos, obtenemos: relación:

$$6EI i_B = \frac{q_2 l_2^3}{4} - 2M_B l_2 - M_C l_2 \quad (9)$$

A continuación procedemos con el tramo BA tal y como se ha hecho en el caso anterior, obteniendo una expresión análoga:

$$-6EI i_B = \frac{q_1 l_1^3}{4} - 2M_B l_1 - M_A l_1 \quad (10)$$

Llegados a este punto, solo falta sumar las dos relaciones (9 y 10) para llegar a la relación (11) conocida como *Teorema de los Tres Momentos* o *Teorema de Clapeyron*.

$$M_A l_1 + 2M_B (l_1 + l_2) + M_C l_2 = \frac{q_1 l_1^3}{4} + \frac{q_2 l_2^3}{4} \quad (11)$$

La formulación del teorema de los tres momentos rápidamente fue asumida tanto en las escuelas superiores docentes, en la bibliografía técnica, así como en los quehaceres de los calculistas. Se han encontrado numerosos ejemplos de cálculos estructurales realizados con el procedimiento del francés Clapeyron.

A continuación (figura 12), se muestra el cálculo de una viga continua, sito en la Memoria del Hotel Colón de Barcelona, realizado con el *Teorema de los tres momentos* [10].

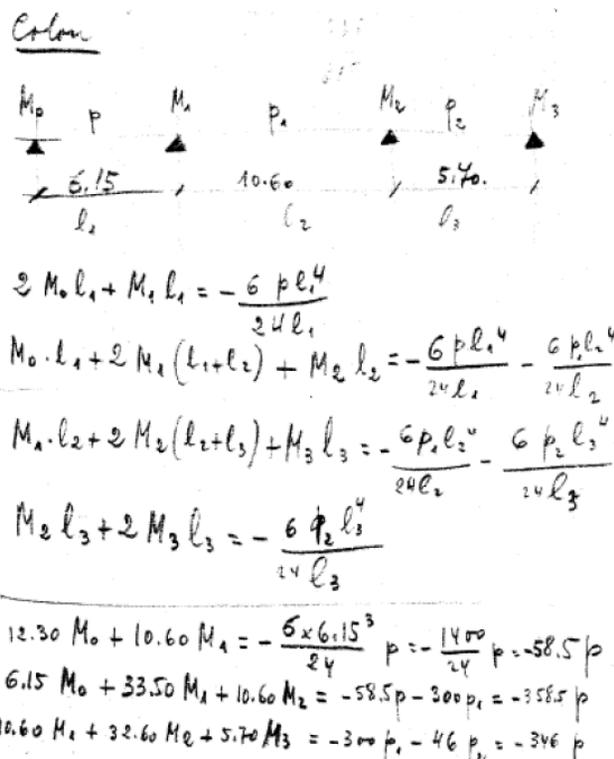


Fig. 12 Ejemplo Método de Cross [10]

Vigas de inercia variable I(x)

El problema se complicará notablemente al considerar el término de la Inercia I como un valor variable I(x) (figura 13).

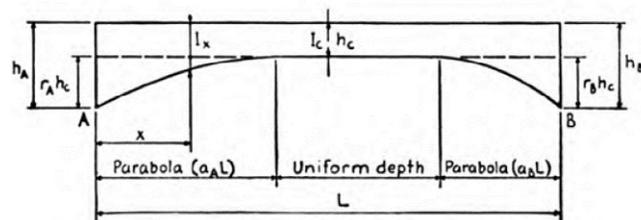


Fig. 13 Caso genérico de viga de Inercia variable I(x) [11].

Este hecho implicará, por un lado, conocer la función I(x) explícitamente, pero también un problema de cálculo, pues la ecuación (2) ya no será resuelta analíticamente de un modo tan directo, habiendo de recurrir en muchos casos al cálculo numérico o al cálculo gráfico [12].

$$EI(x) \frac{d^2y}{dx^2} = M + \mu \rightarrow E \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M+\mu}{I(x)} \quad (12)$$

$$E \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{q_2}{2I(x)}(l_2x - x^2) + \frac{M_B}{I(x)} + \frac{(M_C - M_B)x}{I(x)l_2} \quad (13)$$

$$E \frac{dy}{dx} = \int \left(-\frac{q_2}{2I(x)}(l_2x - x^2) + \frac{M_B}{I(x)} + \frac{(M_C - M_B)x}{I(x)l_2} \right) dx = F(x) \quad (14)$$

$$y = \frac{1}{E} \int F(x) dx \quad (15)$$

Timoshenko [5] [13] ofrece una adaptación del método evitando el cálculo anterior. El autor deduce la ecuación de los *Tres Momentos* para vigas de sección variable:

$$-\frac{C_2^n}{k_n} M_{n-1,n} + \left(\frac{C_2^n}{k_n} + \frac{C_1^{n+1}}{k_{n+1}} \right) M_{n,n-1} + \frac{C_2^{n+1}}{k_{n+1}} M_{n+1,n} = \gamma_n^n + \gamma_n^{n+1} - \theta_{n,n-1} + \theta_{n,n+1} \quad (16)$$

La resolución de la ecuación anterior, donde se han introducido los parámetros correspondientes a los coeficientes angulares, las rigideces y los ángulos de giro (C_n , k_n y θ_n respectivamente), permite encontrar las incógnitas de los momentos. Para ello, y con la finalidad de agilizar el problema, el mismo autor [5] [13] nos reporta dichas relaciones direccionándonos a las tablas de *Portland Cement Association* (1947) [11].

Handbook of Frame Constants

Beam Factors and Moment Coefficients
for
Members of Variable Section

Published by
PORTLAND CEMENT ASSOCIATION
33 West Grand Avenue • Chicago 10, Illinois

Fig. 14 Handbook of Frame Constants [11]

Método de Cross

En mayo de 1930, el ingeniero norteamericano Hardy Cross (1885-1959) publicó en la revista *American Society of Civil Engineers* un artículo titulado *Analysis of continuous frames by distributing fixed-end moments* [14]. Ciertamente es que existían procedimientos de cálculo comúnmente aceptados por los técnicos que pudieran ser añadidos al de Clapeyron. Podríamos citar los métodos energéticos, los gráficos [15], la masa elástica [16], las *slope-deflection*, etc. A pesar de ello, hacían falta formulaciones más ágiles que las existentes ya que, el aumento del número de barras de los entramados, a la vez que su elevada hiperestaticidad, generaba un sistema de ecuaciones resolutiveas que implicaba largos y tediosos cálculos para llegar al resultado deseado [1]. Eran necesarios nuevos métodos que, sin perder de vista el rigor y la seguridad, facilitasen el cálculo al proyectista.

El método de Cross, considerado por los norteamericanos como la aportación más valiosa al cálculo de estructuras durante los treinta años del siglo XX, era uno de ellos; quizás el más importante y trascendente [1]. A partir de su publicación, la difusión del método estuvo muy generalizada, no solo en Norteamérica; en Europa también encontramos variedad de memorias de cálculo realizadas con el método [1]. Por supuesto, la bibliografía técnica y docente prontamente lo adoptó siendo, incluso hoy en día, una herramienta utilizada en la práctica profesional por los ingenieros estructurales [17]. En el estado español, fue la figura del ingeniero don Carlos Fernández Casado [18], quien lo popularizó pasando rápidamente a ser el método de cálculo, prácticamente exclusivo, por parte de los técnicos.



Fig. 15 Edificio de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial (ETSEIB). Barcelona

64.17	-43.79	-31.09	-44.89	-42.40	-45.81	+30.41	-99.07	-88.16	+31.56	-20.39
7.44	+7.76	+4.64	+4.30	+4.91	+5.77	+3.53	+2.80	+4.43	+4.51	+3.96
+4.41	+3.99	+2.16	+3.08	+2.85	+4.68	+1.40	+2.21	+2.85	+4.58	+3.76
41.13	-37.34	-26.50	-34.60	-35.14	-32.16	-20.44	-29.82	-29.78	-30.45	-27.9
194.1	-5.45	-13.96	-11.02	-16.28	-23.40	-14.91	-14.85	-14.07	-18.9	-10.2
0.59	0.42	0.42	0.42	0.42	0.42	0.55	0.35	0.35	0.35	0.35
0.46	0.46	0.42	0.42	0.42	0.42	0.55	0.35	0.35	0.35	0.35
-31.40	-46.12	-34.66	-35.24	-32.17	-46.80	-29.82	-29.78	-30.45	-27.9	-10.2
-72.13	-16.40	-19.25	-13.30	-19.62	-16.08	-10.21	-74.97	-14.86	-13.9	-13.9
+8.69	+7.98	+4.36	+5.77	+6.31	+8.23	+2.80	+6.43	+6.51	+3.96	+3.76
-92.57	-54.77	-43.75	-44.47	-24.28	-22.97	-27.74	-20.20	-14.07	-18.9	-10.2

Fig. 16 Ejemplo del método de Cross. ETSEIB. Fuente: Col·legi Oficial d'Arquitectes de Catalunya (COAC)

Fundamentos del método

La formulación del método es simple. Siguiendo a don Carlos Fernández Casado, transcribimos:

Se parte de una estructura virtual con nudos absolutamente rígidos (es decir, que no permiten giros ni desplazamientos de las extremidades de las barras) y se llega a la estructura real, deshaciendo por etapas esta rigidez, permitiendo sucesivamente los giros y los desplazamientos [19].

Las situaciones que se consideran en la metodología propuesta por Cross, las exponemos en cuatro etapas consecutivas [12]:

- **Etapla primera.** Nudos absolutamente rígidos.
- **Etapla segunda.** Nudos giratorios, pero no desplazables.
- **Etapla tercera.** Nudos desplazables, pero no giratorios.
- **Etapla cuarta.** Nudos giratorios desplazables.

El caso concreto que nos ocupa, estudio de la viga continua, tratándose de un elemento sin desplazamiento queda reducido al planteamiento de las etapas primera y segunda; la llamada *etapa fundamental*.

Conceptualmente, estas etapas quedan teorizadas como se muestra a continuación:

Etapla primera. Nudos absolutamente rígidos (figura 17). Las barras están completamente incomunicadas y en condiciones de empotramiento perfecto en sus extremos [19].

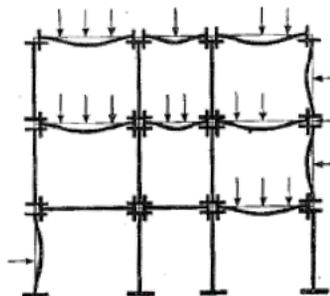


Fig. 17 Etapla primera. Nudos absolutamente rígidos [19]

Etapla segunda. Nudos giratorios, pero no desplazables (figura 18); permiten el giro, pero no los desplazamientos de las extremidades de las barras [19].

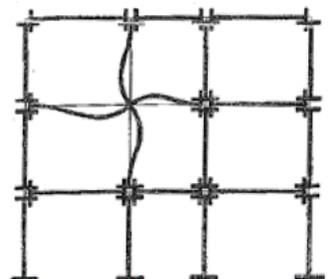


Fig. 18 Etapla segunda. Liberación de un nudo [19]

El punto de partida considera las barras perfectamente empotradas en sus extremos, los cuales ni giran ni se desplazan. Este hecho implica la existencia de unos momentos de empotramiento perfecto (m.e.p.). El primer paso para la resolución del problema será la obtención de los mismos (figura 19).

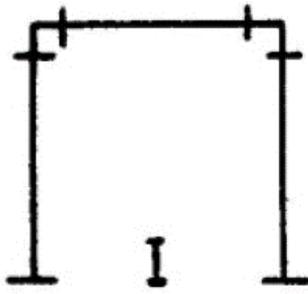


Fig. 19 Etapa primera. Nudos absolutamente rígidos

Para ello partamos del caso más general; el de una viga con carga repartida y extremos empotrados. El momento así determinado será la suma del correspondiente isostático más los correspondientes hiperestáticos según las relaciones siguientes:

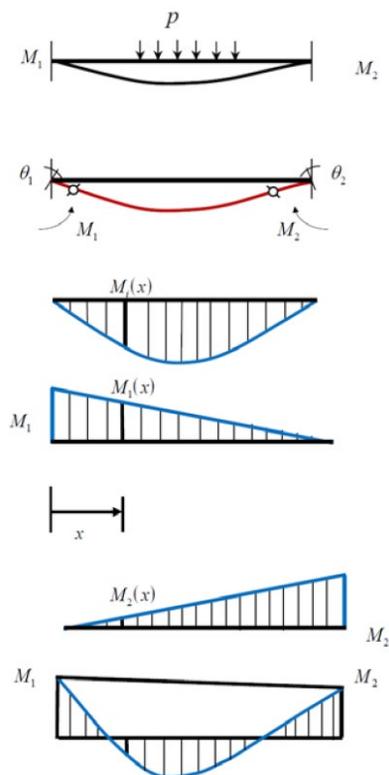


Fig. 20 Diagrama de momentos flectores de la viga de Inercia variable

$$\frac{M_1(x)}{L-x} = \frac{M_1}{L}; \quad \frac{M_2(x)}{x} = \frac{M_2}{L} \quad (17)$$

$$M(x) = M_i(x) + M_1(x) + M_2(x) = M_i(x) - M_1 \cdot \frac{L-x}{L} - M_2 \cdot \frac{x}{L} \quad (18)$$

Determinada esta relación para la deducción de la expresión $M(x)$, los teoremas de Mohr (19, 20) permiten obtener los m.e.p. M_1 y M_2 .

$$\alpha_{0L} = \int_0^L \frac{M(x)}{E \cdot I(x)} \cdot dx = 0 \quad (19)$$

$$\delta_{0L} = \int_0^L \frac{M(x) \cdot x}{E \cdot I(x)} \cdot dx = 0 \quad (20)$$

A pesar de ello, es sabido que los valores de los momentos de empotramiento perfecto se encuentran habitualmente ya tabulados, por lo que raras veces se realizaría el procedimiento anterior para su obtención.

Deshaciendo el empotramiento virtual impuesto en el primer paso, permitimos la rotación del nudo. Este hecho implica la generación de un par, equivalente al existente y de signo contrario, que compensará el obtenido previamente. Debido al hecho de tener nudos giratorios, se repartirá proporcionalmente a la rigidez de cada barra. Posteriormente se efectúa la transmisión de los momentos aparecidos en el reparto hacia los extremos opuestos de la barra (figura 21).

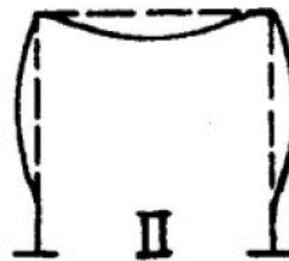


Fig. 21 Etapa segunda. Nudos giratorios, pero no desplazables

DOI: <https://doi.org/10.21501/21454086.3987>

Para ello es necesario conocer los parámetros definidos como *rigidez de la barra K* y el *coeficiente de transmisión β* cuyo significado físico se muestra en la figura 22.

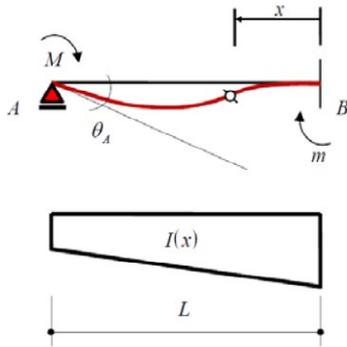


Fig. 22 Constantes elásticas K y β . Significado físico en barras de Inercia variable $I(x)$

Para la determinación de los mismos, consideremos la viga empotrada-apoyada mostrada. Aplicando un par M en el extremo apoyado, dicha sección extrema girará un ángulo θ_A . Se define la *rigidez a flexión K* como el par que es necesario aplicar para obtener un giro unidad en este extremo. Nuevamente, a través de los teoremas de Mohr, podemos obtener el valor de la relación buscada.

En este caso, el par M aplicado genera en el empotramiento B un par m que a priori nos resulta desconocido. El diagrama de momentos de la viga en cuestión es el obtenido por las relaciones:

$$M(x) = M \cdot \frac{x}{L} - m \cdot \frac{L-x}{L} \quad (21)$$

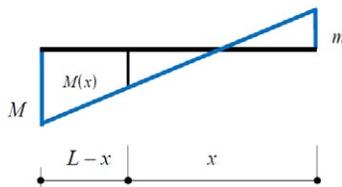


Fig. 23 Diagrama de momentos

La tangente en el empotramiento B interceptará la ordenada en la articulación A a una distancia nula. En este caso obtenemos:

$$0 = \int_0^L M(x) \frac{L-x}{E \cdot I(x)} \cdot dx = \int_0^L \frac{1}{E \cdot I(x)} \cdot \left(M \cdot \frac{x}{L} - m \cdot \frac{L-x}{L} \right) \cdot (L-x) dx \quad (22)$$

O sea:

$$M \int_0^L \frac{L-x}{E \cdot I(x)} \cdot \frac{x}{L} \cdot dx = m \int_0^L \frac{1}{E \cdot I(x)} \cdot \frac{(L-x)^2}{L} dx \quad (23)$$

La relación entre m y M se conoce como *coeficiente de transmisión β*. Esta será:

$$\beta_A = \frac{m}{M} = \frac{\int_0^L \frac{L-x}{E \cdot I(x)} \cdot \frac{x}{L} \cdot dx}{\int_0^L \frac{(L-x)^2}{E \cdot I(x)} \cdot \frac{1}{L} dx} \quad (24)$$

Tomando como referencia I_0 (inercia de una sección cualquiera), definiendo $i = \frac{I_0}{I(x)}$, las anteriores relaciones podrían ser expresadas como:

$$\beta_A = \frac{m}{M} = \frac{\int_0^L \frac{L-x}{L} \cdot \frac{I_0}{I(x)} \cdot (L-x) dx}{\int_0^L \frac{(L-x)^2}{L} \cdot \frac{I_0}{I(x)} \cdot (L-x) dx} = \frac{\int_0^L \frac{L-x}{L} \cdot i \cdot (L-x) dx}{\int_0^L \frac{(L-x)^2}{L} \cdot i \cdot (L-x) dx} \quad (25)$$

$$\int_0^L \frac{L-x}{L} \cdot i \cdot (L-x) dx = S_1 \cdot d_1 \quad (26)$$

$$\int_0^L \frac{(L-x)^2}{L} \cdot i \cdot (L-x) dx = S_2 \cdot d_2 \quad (27)$$

Las integrales anteriores son los momentos estáticos de las áreas S . Aplicando esta igualdad, podemos obtener el valor del *coeficiente de transmisión β*, quedando definido como:

$$\beta = \frac{m}{M} = \frac{S_1 \cdot d_1}{S_2 \cdot d_2} \quad (28)$$

Obtenido el *coeficiente de transmisión* pasemos a obtener el valor de la rigidez K . Aplicando el primer teorema de Mohr, podemos calcular el valor del ángulo girado θ_A en la sección de apoyo en función de M .

$$\begin{aligned}\theta_A &= \int_0^L \frac{M(x)}{E \cdot I(x)} \cdot dx = \\ &= \int_0^L \frac{1}{E \cdot I(x)} \cdot \left(M \cdot \frac{x}{L} - m \cdot \frac{L-x}{L} \right) dx = \\ &= \frac{1}{E \cdot I_0} \left(M \int_0^L \frac{x}{L} dx - m \cdot \int_0^L \frac{L-x}{L} dx \right) = \\ &= \frac{1}{E \cdot I_0} (M \cdot S_1 - \beta \cdot M \cdot S_2)\end{aligned}\quad (29)$$

Finalmente se obtiene el valor de la rigidez K:

$$K = \frac{M}{\theta_A} = \frac{M \cdot E I_0}{M \cdot S_1 - \beta \cdot M \cdot S_2} = \frac{E I_0}{S_1 - \beta \cdot S_2}\quad (30)$$

Vigas de inercia constante I

La operatividad se simplifica considerablemente en el caso de una viga con un valor constante de Inercia I. En este caso, las relaciones (28, 30) se convierten en:

Coefficiente de transmisión β :

$$\beta = \frac{m}{M} = \frac{\int_0^L \frac{x(L-x)}{E \cdot I(x)} dx}{\int_0^L \frac{(L-x)^2}{E \cdot I(x)} dx} = \frac{1}{2}\quad (31)$$

Rigidez K:

$$\theta_A = \int_0^L \frac{M(x)}{E \cdot I(x)} \cdot dx = \int_0^L \frac{1}{E \cdot I(x)} \cdot \left(M \cdot \frac{x}{L} - m \cdot \frac{L-x}{L} \right) dx = \frac{L \cdot M}{4 \cdot E \cdot I}\quad (32)$$

De donde se deduce la relación:

$$K = \frac{M}{\theta_A} = \frac{4 \cdot E \cdot I}{L}\quad (33)$$

Nuevamente constatamos el hecho que, trabajando con vigas de sección constante I, el cálculo se simplifica notablemente.

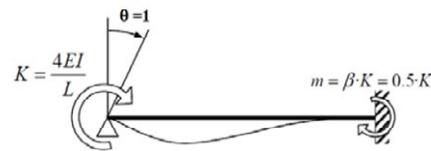


Fig. 24 Constantes elásticas K y β . Significado físico en barras de Inercia constante I

A continuación (figura 25), se muestra un ejemplo de aplicación del Método de Cross (etapas primera y segunda), sito en la memoria de cálculo de la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Barcelona (ETSAB), con fecha del curso 1961-1962, siendo obra del arquitecto catalán Eusebi Bona (1890-1972).

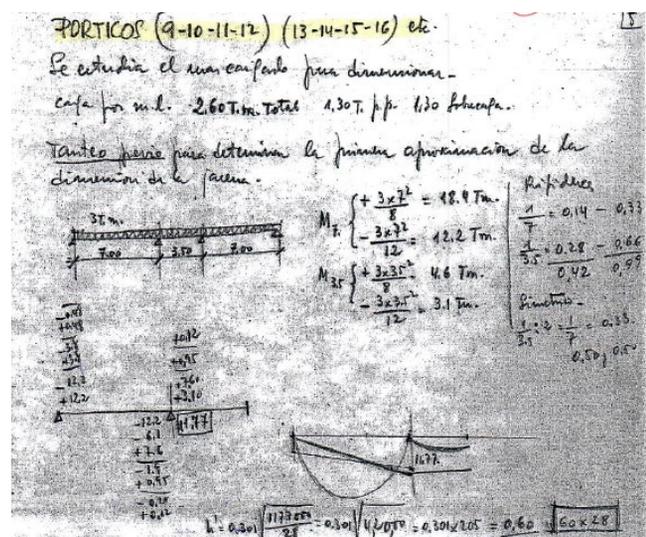


Fig. 25 Ejemplo del método de Cross. Etapa fundamental. ETSAB. Fuente: COAC

Vigas de inercia variable I(x)

En este caso, el problema consistirá en determinar cómo afecta la Inercia variable de la sección $I(x)$ a la determinación, tanto de los momentos de empotramiento perfecto, como de las constantes elásticas K y β . Fundamentalmente nos encontramos con dos casos posibles; acartelamientos parabólicos (figura 26) y acartelamientos rectangulares (figura 27).

DOI: <https://doi.org/10.21501/21454086.3987>

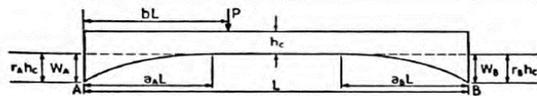


Fig. 26 Viga con Inercia variable I(x). Cartela parabólica

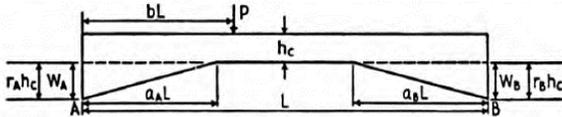


Fig. 27 Viga con Inercia variable I(x). Cartela rectangular

The two groups of tables, 1-26 and 27-52, are in layout and arrangement exact duplicates of each other, the only basic difference being that the general equation for the variable moment of inertia is

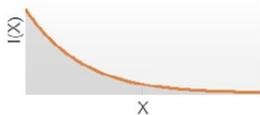
$$I_x = I_c \left[1 + r \left(1 - \frac{x}{aL} \right)^2 \right]^3 \text{ for parabolic haunches,}$$

and

$$I_x = I_c \left[1 + r \left(1 - \frac{x}{aL} \right) \right]^3 \text{ for straight haunches}$$

Fig. 28 Ecuaciones de gobierno de secciones de Inercia variable I(x). Parabólicas y rectangulares

Inercia parabólica



Inercia rectangular

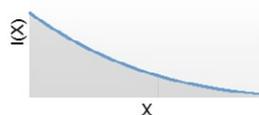


Fig. 29 Representación de la Inercia I(x) en función de la distancia, de las relaciones anteriores

Cálculo de los momentos de empotramiento perfecto (m.e.p.)

El cálculo de los m.e.p., puede ser abordado analítica (19 y 20), gráfica o numéricamente. Ahora bien, en la mayoría de casos consultados, el calculista ha recurrido a la obtención de los mismos a través de tablas apropiadas para ello en función de diversas tipologías (hecho que evita recurrir al cálculo formal de dichos valores).

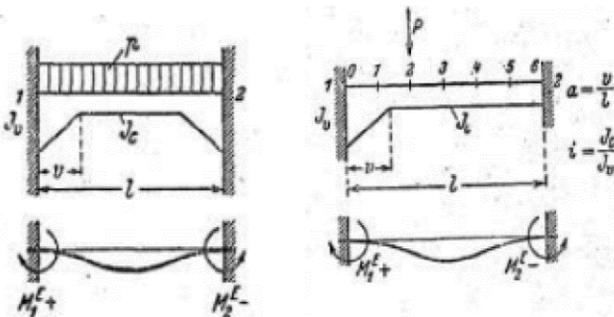


Fig. 30 Ejemplos de barra I(x) con diversidad de acartelamientos y cargas [21]

Los valores de los m.e.p., habitualmente se pueden encontrar tabulados en función de $q \cdot l^2$. Este hecho permite una clara analogía con los valores de m.e.p. de vigas de I constante con carga uniforme distribuida. En aquel caso, se multiplicaba por un valor constante de 1/12. Ahora se deja en función de un parámetro R a calcular.

$$M_{ij} = R \cdot q \cdot l^2 \quad (33)$$

Este parámetro R vendrá dado en función de la relación de Inercias viga-cartela, así como de la relación de longitudes entre la cartela y la viga, respectivamente.

$$R = f \left(\frac{I_{\text{viga}}}{I_{\text{cartela}}}, \frac{v}{l} \right) \quad (34)$$

Tabla 1. Ejemplo de tabla genérica del valor de R función de Inercias y longitudes [21].

Momentos de empotramiento perfecto M_1^E y M_2^E para una carga unitaria = p

$$M_1^E = +r_1 \cdot pl^2; \quad M_2^E = -r_2 \cdot pl^2$$

valor superior: r_1
valor inferior: r_2

	$I = J_c : J_0$							
	1,00	0,80	0,30	0,10	0,06	0,03	0,01	0,00
1	0,00	0,0833	0,0833	0,0833	0,0833	0,0833	0,0833	0,0833
	0,0833	0,0833	0,0833	0,0833	0,0833	0,0833	0,0833	0,0833
2	0,10	0,0833	0,0895	0,0965	0,1042	0,1068	0,1095	0,1125
	0,0833	0,0804	0,0772	0,0735	0,0722	0,0710	0,0698	0,0675
3	0,20	0,0833	0,0932	0,1057	0,1221	0,1281	0,1345	0,1415
	0,0833	0,0788	0,0731	0,0690	0,0645	0,0608	0,0579	0,0533
4	0,30	0,0833	0,0951	0,1114	0,1356	0,1454	0,1565	0,1682
	0,0833	0,0781	0,0711	0,0611	0,0573	0,0530	0,0482	0,0408
5	0,40	0,0833	0,0956	0,1136	0,1435	0,1570	0,1735	0,1943
	0,0833	0,0777	0,0701	0,0584	0,0535	0,0476	0,0407	0,0300
6	0,50	0,0833	0,0952	0,1131	0,1460	0,1618	0,1832	0,2167
	0,0833	0,0775	0,0696	0,0572	0,0517	0,0448	0,0358	0,0208
7	1,00	0,0833	0,0925	0,1045	0,1260	0,1365	0,1510	0,1745
	0,0833	0,0747	0,0648	0,0502	0,0442	0,0371	0,0276	0,0000

Determinación del coeficiente de transmisión β i de la rigidez K

Para encontrar los valores β y K , al igual que en el caso anterior, deberíamos calcular las ecuaciones respectivas (28, 29 y 30) si procediésemos con un método analítico. Aunque también encontramos referencias a la solución gráfica [12], las fuentes consultadas nos permiten afirmar que, como en el caso precedente, el proceder más habitual de los calculistas fuere el uso de tablas dispuestas con los principales acartelamientos. Estas han permitido de manera ágil la obtención de dichos valores.

Tabla 2. Ejemplo de tabla genérica de los valores β y K función de Inercias y longitudes [21]

		Rigideces ideales $K_i = k \cdot \frac{J_c}{l}$		Momentos transmitidos $M'' = m \cdot M'$							
				1	2	3	4	5	6	7	8
				Valor superior = k				valor inferior = m			
				$i = J_c : J_B$							
				1,00	0,60	0,30	0,10	0,06	0,03	0,01	0,00
1	2	0,0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
			0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500
			1,00	1,11	1,25	1,42	1,48	1,55	1,62	1,77	
			0,500	0,527	0,562	0,596	0,605	0,615	0,626	0,646	
			1,00	1,21	1,53	2,07	2,30	2,60	2,98	3,89	
			0,500	0,548	0,602	0,673	0,694	0,718	0,743	0,786	
3	0,2	1,00	1,30	1,83	3,02	3,84	4,83	6,50	13,20		
		0,500	0,556	0,628	0,726	0,757	0,800	0,839	0,905		
4	0,3	1,00	1,37	2,10	4,00	5,39	8,54	14,83	33,80		
		0,500	0,557	0,632	0,730	0,786	0,838	0,889	0,960		
5	0,4	1,00	1,43	2,31	5,15	6,58	12,60	26,90	∞		
		0,500	0,550	0,613	0,717	0,757	0,803	0,857	1,000		

Una vez obtenidos los m.e.p. y los correspondientes valores de β y K , podemos pasar a determinar el valor de los momentos finales aplicando nuevamente la metodología de Cross expuesta previamente.

Estos procedimientos han sido los que habitualmente hemos encontrado en la información técnica consultada (apuntes docentes, libros y memorias de cálculo) y fueron los que han perdurado principalmente hasta la irrupción de los métodos numéricos y sus aplicaciones [1], [22]. Para fijar conceptos presentamos un ejercicio de una viga continua resuelta por ambos métodos (Clapeyron y Cross), por un lado, con vigas de inercia constante (casos a y b) y, por el otro, con vigas de inercia variable (casos c y d). Estas formulaciones serán comparadas con la correspondiente numérica (obteni-

da con un programa de cálculo¹). Se verá que los resultados (salvando los propios matices de cada método) serán prácticamente iguales.

Ejemplo: Supongamos una viga continua cargada como se presenta en la figura 31:



Fig. 31 Viga continua a resolver por ambos métodos.

Solución con tipología de Inercia constante (casos a y b)

Si la viga es resuelta con una tipología de inercia constante, tendrá una distribución debida al peso propio de la misma, constante en todas las secciones (figura 32).



Fig. 32 Viga continua con tipología de Inercia constante

Este hecho facilitará, como veremos, notablemente los cálculos, tanto los obtenidos con el método de Clapeyron como los correspondientes con el de Cross.

La distribución de los momentos flectores, obtenida numéricamente, es la presentada en la Imagen de la figura 33.



Fig. 33 Diagrama de momentos flectores. Método numérico

Tabla 3. Valores de los momentos flectores. Método numérico

Punto	0	1	2	3
Momento (T·m)	0	53,52	42,25	0

¹Diamonds. Software para el análisis estructural de construcciones en acero, hormigón y madera.

a) Método de Clapeyron (Viga de Inercia constante)

Planteo de las ecuaciones correspondientes (1):

$$2M_1 \cdot 33 + M_2 \cdot 22 = \frac{1}{4} 1,49(11^3 + 22^3)$$

$$M_1 \cdot 22 + 2M_2 \cdot 33 = \frac{1}{4} 1,49(22^3)$$

$$M_1 = M_3 = 0 \text{ (Articulación)}$$

Obteniendo por resolución del sistema los valores correspondientes de los momentos en los puntos 1 y 2, respectivamente: $M_1 = 53,52 \text{ T}\cdot\text{m}$ y $M_2 = 42,25 \text{ T}\cdot\text{m}$.

Tabla 4. Valores de los momentos flectores. Método de Clapeyron

Punto	0	1	2	3
Momento (T·m)	0	53,52	42,25	0

b) Método de Cross (Viga de Inercia constante)

Siendo el caso de viga continua, el procedimiento se realiza solo con la etapa fundamental, esto es, las Etapas I y II. Para ello, seguiremos el procedimiento visto en el apartado correspondiente.

Cálculo de las inercias de las barras.

$$I_{01} = I_{12} = I_{13} = I$$

Cálculo de las rigideces de las barras.

$$K_{01} = K_{23} = \frac{4EI}{L} = \frac{4EI}{11} ; K_{12} = \frac{4EI}{L} = \frac{4EI}{22}$$

Coefficientes de reparto.

Nudo 1

$$r_1 = \frac{K_{01}}{K_{01} + K_{12}} = 0,667 ; r_2 = \frac{K_{12}}{K_{12} + K_{01}} = 0,333$$

Nudo 2

$$r_1 = \frac{K_{12}}{K_{12} + K_{23}} = 0,333 ; r_2 = \frac{K_{23}}{K_{23} + K_{12}} = 0,667$$

Pares de empotramiento perfecto (T·m).

$$|M_{01}| = \frac{1}{12} ql^2 = 15 ; |M_{1C}| = \frac{1}{12} ql^2 = 60,1$$

Criterio de signos 

Con el procedimiento de Cross obtendremos el siguiente resultado (figura 34):

0,00	-53,45	53,42	-42,32	42,24	0,00
1,74			1,06	2,12	-1,06
-1,74	← -3,47	-1,74	→ -0,87	-2,32	← -4,64
5,78	→ 2,89	2,32	← 4,64	9,28	→ 4,64
-5,78	← -11,55	-5,78	→ -2,89	-11,05	← -22,10
12,54	→ 6,27	11,05	← 22,10	44,20	→ 22,10
-12,54	← -25,08	-12,54	→ -6,27		
-15,00	→ -7,50				
15,00	-15,00	60,10	-60,10	0,00	0,00
	0,67	0,33	0,33	0,67	

Fig. 34 Procedimiento de Cross. Etapa fundamental

Podemos calcular, de forma más rápida, el mismo problema con la modificación de las rigideces, las cuales ahora variarán su valor respecto al caso anterior, pues consideramos el extremo articulado.

Cálculo de las inercias de las barras.

$$I_{01} = I_{12} = I_{13} = I$$

Cálculo de las rigideces de las barras.

$$K_{01} = K_{23} = \frac{3EI}{L} = \frac{3EI}{11} ; K_{12} = \frac{4EI}{L} = \frac{4EI}{22}$$

Coefficientes de reparto.

Nudo 1

$$r_1 = \frac{K_{01}}{K_{01} + K_{12}} = 0,6 ; r_2 = \frac{K_{12}}{K_{12} + K_{01}} = 0,4$$

Nudo 2

$$r_1 = \frac{K_{12}}{K_{12} + K_{23}} = 0,4 ; r_2 = \frac{K_{23}}{K_{23} + K_{12}} = 0,6$$

Pares de empotramiento perfecto (T·m).

$$|M_{01}| = \frac{1}{8} q l^2 = 22,53 \text{ (}^2\text{)}$$

$$|M_{12}| = \frac{1}{12} q l^2 = 60,1$$

Criterio de signos



Con el procedimiento de Cross, obtendremos el siguiente resultado (figura 35):

0,00	-53,51	53,51	-42,26	42,26	0,00
	-0,32	-0,22	0,04	0,07	
	-8,11	-5,41	-2,70	1,62	
	-22,54	-15,03	-7,51	40,57	
	-22,53	60,10	-60,10	0,00	0,00
	0,60	0,40	0,40	0,60	

Fig. 35 Procedimiento de Cross. Etapa fundamental

Tabla 5. Valores de los momentos flectores. Método de Cross

Punto	0	1	2	3
Momento (T·m)	0	53,51	42,26	0

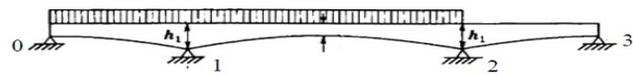
Como se ha podido comprobar, las soluciones analíticas propuestas por Clapeyron y Cross (sin modificación y con modificación de la rigidez), coinciden entre ellas y también con la formulación numérica (como era de esperar).

Solución con tipología de Inercia variable (casos c y d)

Para el estudio de una estructura con perfiles de Inercia variable, tomaremos la formulada en el libro *Teoría de las estructuras* de Timoshenko-Young [5], [13]. En este, los autores analizan un puente de tres tramos cargado

² En este caso, el valor del momento flector varía respecto al anterior porque se considera el caso de extremo articulado-empotrado.

según mostramos en la figura 36 y reforzado con arcos de espesor variable (figura 36). Su propuesta es la de utilizar, para su estudio, acartelamientos parabólicos ($\lambda l = l/2$, con $h_0 = 0,76$ m. y $h_1 = 2,29$ m.)

Fig. 36 Viga continua con $l(x)$

El estudio que a continuación se presenta es la resolución del problema por el método de Clapeyron con acartelamientos parabólicos (tal y como los autores refieren). A esta se ha añadido la resolución en el caso de acartelamientos rectangulares. Posteriormente, será formulado este último caso por el método de Cross.

Si la viga es resuelta con una tipología de inercia variable, tendrá una distribución debida al peso propio de la misma función de la sección a considerar, como se indica en la figura 37.



Fig. 37 Viga continua con tipología de Inercia variable

En este caso, la solución numérica de los valores de la distribución de momentos flectores, será la presentada en la imagen de la figura 38.



Fig. 38 Valores de los momentos flectores. Método numérico

Punto	0	1	2	3
Momento (T·m)	0	81,15	63,98	0

c) Método de Clapeyron (Viga de Inercia variable)

Para ello empezaremos nuestro estudio con la ecuación de los tres momentos aplicada a los tramos correspondientes (16).

DOI: <https://doi.org/10.21501/21454086.3987>

$$-\frac{C_2^n}{k_n} M_{n-1,n} + \left(\frac{C_2^n}{k_n} + \frac{C_1^{n+1}}{k_{n+1}}\right) M_{n,n-1} + \frac{C_2^{n+1}}{k_{n+1}} M_{n+1,n} = \gamma_n^n + \gamma_n^{n+1} - \theta_{n,n-1} + \theta_{n,n+1}$$

Tramo 0-1-2 (n=1)

$$\frac{C_2^1}{k_1} M_{0,1} + \left(\frac{C_2^1}{k_1} + \frac{C_1^2}{k_2}\right) M_{1,0} + \frac{C_2^2}{k_2} M_{2,1} = \gamma_1^1 + \gamma_1^2 - \theta_{1,0} + \theta_{1,2}$$

Tramo 1-2-3 (n=2)

$$\frac{C_2^2}{k_2} M_{1,2} + \left(\frac{C_2^2}{k_2} + \frac{C_1^3}{k_3}\right) M_{2,1} + \frac{C_2^3}{k_3} M_{3,2} = \gamma_2^2 + \gamma_2^3 - \theta_{2,1} + \theta_{2,3}$$

La diferencia substancial con la resolución de la viga de Inercia constante I vista anteriormente, quedará reducida a la determinación de los coeficientes angulares (C_n), los ángulos de giro (θ_n), las rigideces (k_n) y los ángulos de rotación (γ_n)³. Como se ha indicado, pueden ser hallados con relativa facilidad en las tablas de la Portland Cement Association (1947) [11]. Obtenidos estos valores (tabla 6), podremos pasar a la resolución del sistema de ecuaciones anteriores.

Tabla 6. Valores de los coeficientes C_i y γ_i en función del tipo de cartela

		Cartela parabólica	Cartela rectangular	Cartela parabólica	Cartela parabólica	Cartela rectangular	Cartela rectangular
				γa	γb	γa	γb
I	C1	0,2332	0,1373	0,0203	0,0107	0,0100	0,0050
	C2	0,0620	0,0293	$\frac{q l^3}{E I_0}$	$\frac{q l^3}{E I_0}$	$\frac{q l^3}{E I_0}$	$\frac{q l^3}{E I_0}$
	C3	0,0492	0,0260				
II	C1	0,1137	0,0622	0,0223	0,0223	0,0123	0,0123
	C2	0,0891	0,0491	$\frac{q l^3}{E I_0}$	$\frac{q l^3}{E I_0}$	$\frac{q l^3}{E I_0}$	$\frac{q l^3}{E I_0}$
	C3	0,1137	0,0622				
III	C1	0,0492	0,0260	0	0	0	0
	C2	0,0620	0,0293				
	C3	0,2332	0,1373				

Con estos valores podemos escribir el sistema de ecuaciones que nos dará como resultado el valor de los momentos deseados, para el caso de cartelas parabólicas y para el caso de cartelas rectangulares.

³ Ángulos de rotación de los extremos de la viga originados sólo por cargas laterales.

Cartelas parabólicas

$$0,276 M_{10} + 0,178 M_{2,1} = 34,09$$

$$-0,089 M_{1,2} + 0,138 M_{2,1} = 16,08$$

Teniendo presente que:

$$M_{10} = -M_1, M_{21} = -M_2, M_{12} = M_1$$

Obtenemos los valores finales:

$$M_1 = -82,81 \text{ Tn} \cdot m, M_2 = -63,12 \text{ Tn} \cdot m$$

Cartelas rectangulares

$$0,1504 M_{10} + 0,0982 M_{2,1} = 18,864$$

$$-0,0491 M_{1,2} + 0,0752 M_{2,1} = 8,870$$

Teniendo presente que:

$$M_{10} = -M_1, M_{21} = -M_2, M_{12} = M_1$$

Obtenemos los valores finales:

$$M_1 = -82,84, M_2 = -62,85 \text{ Tn} \cdot m$$

Tabla 7. Valores de los momentos flectores. Método de Clapeyron

Punto	A	B	C	D
Momento (T·m)	0	82,81	63,12	0

Tabla 8. Valores de los momentos flectores. Método de Clapeyron

Punto	A	B	C	D
Momento (T·m)	0	82,84	62,85	0

d) Método de Cross (Viga de Inercia variable)

Al igual que en el caso anterior, siendo el caso de una viga continua, la formulación del método se realiza solo con la etapa fundamental. Procederemos teniendo presente que siendo vigas con Inercia variable, los valores

de los momentos (pares) de empotramiento perfecto, coeficientes de rigidez y coeficientes de transmisión, se verán afectados como previamente se ha indicado.

El enunciado refiere las alturas de las zona correspondientes a las secciones en 0 y 3 ($h_c=0,76$ m.), así como la correspondiente de las zonas 1 y 2 ($h_v=2,29$ m.). Estos valores permiten el cálculo del parámetro i que nos proporciona la relación de Inercias I_c e I_v .

$$i = \frac{I_c}{I_v} = \left(\frac{h_c}{h_v}\right)^3 = 0,0365$$

El otro valor característico, que previamente calcularemos en esta tipología concreta de vigas de inercia variable, fuere la relación de longitudes entre la cartela y la viga correspondiente, α (v/l). Tanto los tramos de vigas 01, como 23, tienen la cartela situada en toda la longitud de la viga (supondremos en crecimiento lineal), por lo tanto $v=1$. En la viga central $v=0,5$ por estar situada desde la mitad de la misma hasta el extremo correspondiente. Con los dos valores (i, v), podremos pasar a calcular lo correspondiente a los valores de momentos de empotramiento perfecto, coeficiente de rigidez y coeficientes de transmisión.

Cálculo de las rigideces de las barras.

$$K_{ij} = k \cdot \frac{EI}{l}, \quad k = f\left(\frac{I_{viga}}{I_{cartela}}, \frac{v}{l}\right)$$

$$K_{01} = K_{23} = 10,32 \cdot \frac{EI}{11}, \quad K_{12} = 11,32 \cdot \frac{4EI}{22},$$

Coefficientes de reparto.

Nudo 1

$$r_1 = \frac{K_{01}}{K_{01} + K_{12}} = 0,65 ; \quad r_2 = \frac{K_{12}}{K_{12} + K_{01}} = 0,35$$

Nudo 2

$$r_1 = \frac{K_{12}}{K_{12} + K_{23}} = 0,35 ; \quad r_2 = \frac{K_{23}}{K_{23} + K_{12}} = 0,65$$

Coefficientes de transmisión.

$$\beta = f\left(\frac{I_{viga}}{I_{cartela}}, \frac{v}{l}\right)$$

Tramo 01. Siendo el extremo articulado, el momento final ha de ser cero, por lo tanto $\beta=0$.

Tramo 12. En este caso, la tabla genérica nos proporciona el valor del coeficiente que toma el valor $\beta=0,793$.

Tramo 23. Siendo el extremo articulado, el momento final ha de ser cero, por lo tanto $\beta=0$.

Pares de empotramiento perfecto (T·m).

$$M_{ij} = R \cdot q \cdot l^2 \quad (33)$$

$$R = f\left(\frac{I_{viga}}{I_{cartela}}, \frac{v}{l}\right) \quad (34)$$

$$|M_{01}| = 0,19 \cdot ql^2 = 34,25$$

$$|M_{12}| = 0,11 \cdot ql^2 = 79,32$$

Criterio de signos 

Con el procedimiento de Cross obtendremos el siguiente resultado (figura 39):

0,00	-81,39	81,39	-64,64	64,64	0,00
←	-1,28	-0,69	→	0,19	0,35
		1,96	←	-0,54	2,48
←	-16,57	-8,92	→	-7,07	4,60
←	-29,30	-15,77	→	32,14	59,69
			→	-12,51	
	-34,25	79,32	-79,32	0,00	0,00
	0,65	0,35	0,35	0,65	

Fig. 39 Procedimiento de Cross. Etapa fundamental

Tabla 9. Valores de los momentos flectores. Método de Cross

Punto	0	1	2	3
Momento (T·m)	0	81,52	64,72	0

2. CONCLUSIONES

Al principio del artículo se argüía la dualidad, tanto en el mundo académico como en el profesional, de vigas de inercia constante I y vigas de inercia variable $I(x)$. Un repaso histórico de dos de los principales métodos de resolución de estructuras (Clapeyron y Cross), nos ha permitido observar cómo era planteado y resuelto el problema estructural en ambas tipologías. El hecho de emplear perfiles con sección variable añadía al problema planteado una dificultad en la operativa y en el cálculo. En este caso, a pesar del planteamiento analítico exhaustivo de la solución que nos muestran los métodos, así como la existencia de procedimientos gráficos para su resolución, la bibliografía consultada de la época nos permite afirmar que fuere utilizando tablas dispuestas a tal efecto que el calculista encontraba la solución al problema planteado.

Con este trabajo, los autores han querido completar el estudio generalista del método de Cross y su implementación en España, publicado en esta misma revista [23], que versaba sobre la implementación del método exclusivamente con perfiles de inercia constante I .

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean hacer constar en este apartado su agradecimiento al Dr. Dario Aristizabal-Ochoa de la Universidad Nacional de Colombia (National University of Colombia), sus comentarios a los borradores, así como sus sugerencias bibliográficas durante la redacción del artículo de investigación.

CONFLICTO DE INTERESES

Los autores declaran la inexistencia de conflicto de interés con institución o asociación comercial de cualquier índole.

3. REFERENCIAS

- [1]. J. M^a Pons-Poblet, "De Gaudí a Miralles: cent anys d'estructura metàl·lica a Barcelona". Tesis doctoral, Barcelona. <http://hdl.handle.net/10803/279396>, 2014.
- [2]. Hangar para el aeroclub de cuatro vientos (Madrid). Archivo Torroja. Expte. n^o 725. Noviembre de 1949.
- [3]. Material docente obtenido de la asignatura *Estructuras* impartida en el curso 1963-64 en la Escuela Técnica Industrial de Barcelona.
- [4]. Archivo Carlos Fernández Casado. FC-114. Años 1960-1964.
- [5]. S. Timoshenko, *Teoría de las Estructuras*. Bilbao: Urmo, 1974.
- [6]. Archivo Carlos Fernández Casado. FC-114. Años 1960-1964.
- [7]. X. Busquets, J. Batanero, R. Rodríguez-Borlado, C. Martínez Lasheras y R. Martínez Lasheras. "Estructura metálica del edificio social de la mutua general de seguros-Barcelona-España", *Informes de la Construcción*, vol. 30, no. 294, pp. 57-82. <https://doi.org/10.3989/ic.1977.v30.i294.2637>
- [8]. B. Clapeyron, "Calcul d'une poutre élastique reposant librement sur des appuis inégalement espacés", *Comptes Rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, vol. 45, 1076-1080.
- [9]. J. Heyman, *Structural Analysis: A Historical approach*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
- [10]. Reforma del edificio del antiguo Hotel Colón (Barcelona), obra del arquitecto Eusebi Bona.

- [11]. Handbook of Frame Constants. *Beams Factors and Moment Coefficients for Members of Variable Section*. Portland Cement Association. 33 West Grand Avenue. Chicago 10, Illinois, 1947.
- [12]. C. Fernández Casado, *Cálculo de estructuras reticulares: nudos rígidos* (8ª ed. Reformada). Madrid: Dossat, 1967.
- [13]. S. Timoshenko, *Theory of structures*. New York: McGraw-Hill, 1965.
- [14]. H. Cross, "Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed-End Moments", *Proceeding of the American Society of Civil Engineers*, vol. 56, no. 1, 1932. <https://doi.org/10.1061/TACEAT.0004333>
- [15]. J. Mª Pons-Poblet y A. Arboix-Alió, "La estática gráfica, pasado y presente de una metodología singular", *EGA Expresión Gráfica Arquitectónica*, vol. 25, no. 39, pp. 132-143, 2020. <https://doi.org/10.4995/ega.2020.12841>
- [16]. J. Mª Pons-Poblet, "Mecánica Elástica, por A. Peña Boeuf. Noventa años después", *Revista de Obras Públicas*, no. 3576, pp. 59-62, 2016. http://ropdigital.ciccp.es/pdf/publico/2016/2016_mayo_3576_07.pdf
- [17]. D. Aristizabal-Ochoa, "Análisis de primer y segundo-orden y estabilidad de pórticos con conexiones semirrígidas: método de Hardy Cross (i-teoría)", *DYNA*, vol. 78, no. 167, pp. 103-111, 2011.
- [18]. J. Mª Pons-Poblet, "Cálculo de Estructuras Reticulares. Carlos Fernández Casado", *Revista de Obras Públicas*, no. 3593, pp. 70-81, 2017. http://ropdigital.ciccp.es/pdf/publico/2017/2017_diciembre_3593_07.pdf
- [19]. C. Fernández Casado, *Estructuras de edificios*. Madrid, España: Dossat, 1948.
- [20]. C. Fernández Casado, *Cálculo de estructuras reticulares: nudos rígidos* (3ª ed. Ref.). Madrid: Dossat, 1944.
- [21]. C. Prenzlöw, *Cálculo de estructuras por el método de Cross*. Barcelona: Gustavo Gili, 1958.
- [22]. A. Palacio-Betancur and D. Aristizabal-Ochoa, "Second-order Stiffness Matrix and Loading Vector of a Tapered Rectangular Timoshenko Beam-column With Semirigid Connections", *Structures*, vol. 15, pp. 211-223, 2018. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2018.07.002>
- [23]. J. Mª Pons-Poblet, "The Hardy Cross Method, and its implementation in Spain", *Lámpsakos*, vol. 23, no. 23, p. 56-69, 2020. <https://doi.org/10.21501/21454086.3402>